Exercices du chapitre 1 avec corrigé succinct

Exercice I.1 Ch1-Exercice1

Soit la proposition P : n est un entier impair,

— Donner (**non** P) lorsque l'on considère que n est un entier,

— Donner (**non** P) lorsque l'on considère que n est un réel,

et en conclure que la réponse dépend du contexte.

Solution :

— **non** P : n est un entier pair,

— **non** P : $n \in \mathbb{R}$ n'est pas un entier impair (ce peut être un entier pair ou un rationnel non entier ou un irrationnel).

Exercice I.2 Ch1-Exercice2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient les deux propositions :

— P : n est un entier pair,

— Q : n est un entier impair,

La proposition (P **ou** Q) est-elle vraie pour tout n ? Quel est le résultat si l'on considère $n \in \mathbb{R}$?

Solution : La proposition (P **ou** Q) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition (P **ou** Q) est fausse si n est un réel non entier.

Exercice I.3 Ch1-Exercice3

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soient les deux propositions :

— $P : x \leq 0$,

— $Q : x \geq 0$,

La proposition (P **ou** Q) est-elle vraie, quel que soit x ? Même question si l'on remplace Q par : $x > 0$. Même question enfin, si l'on remplace P par $x < 0$ et Q par $x > 0$.

Solution : La proposition (P **ou** Q) est vraie, quel que soit x dans les deux premiers cas.Elle est fausse dans le troisième, pour $x = 0$ et vraie pour $x \neq 0$.

Exercice I.4 Ch1-Exercice4

On suppose que la proposition (P **ou** Q) est vraie. Comment doit être la proposition P pour être sûr que la proposition Q est vraie ? Application : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soient les deux propositions

— P : f est impaire ($f(-x) = -f(x)$, quel que soit x réel),

— Q : f est dérivable,

et on suppose que (P **ou** Q) est vraie pour les fonctions que l'on va considérer. Soit $f_1(x) = x^2$ et $f_2(x) = 1$ si $x > 0$, $f_2(x) = -1$ si $x < 0$ et $f_2(0) = 0$. Peut-on en déduire que les fonctions f_1 et f_2 sont dérivables ?

Solution : D'après la définition, si (P **ou** Q) est vraie et si P est fausse alors Q est nécessairement vraie. En effet si Q était fausse, puisque P est fausse alors la proposition (P **ou** Q) serait fausse !
Pour la fonction f_1, la proposition P est fausse, donc la proposition Q est vraie.
Pour la fonction f_2, la proposition P est vraie, on ne peut donc pas conclure sur la proposition Q (et vous qu'en pensez-vous ?).

Exercice I.5 Ch1-Exercice5

Montrer que (P **ou** Q)**ou** R est équivalente à P **ou** (Q **ou** R).

Solution : (P **ou** Q)**ou** R est vraie si et seulement si (P **ou** Q) est vraie ou R est vraie, c'est à dire si et seulement si P est vraie ou Q est vraie ou R est vraie. Le résultat est le même pour la deuxième proposition.

Exercice I.6 Ch1-Exercice6

Donner un théorème qui s'énonce comme une condition nécessaire et suffisante. Il y en a biensûr un très grand nombre.

Solution : Le théorème de Pythagore est une condition nécessaire et suffisante (l'énoncer).

Exercice I.7 Ch1-Exercice7

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient les deux propositions :

— P : n est pair,
— Q : n est impair,

La proposition (P **et** Q) est-elle vraie ?

Solution : La proposition (P **et** Q) est fausse, quel que soit l'entier naturel n.

Exercice I.8 Ch1-Exercice8

Soient les deux propositions :

— P : x est un réel tel que $x \leq 0$,
— Q : x est un réel tel que $x \geq 0$,

énoncer la proposition (P **et** Q) ?

Solution : La proposition (P **et** Q) s'énonce $x = 0$.

Exercice I.9 Ch1-Exercice9

Soient trois propositions P, Q et R, montrer les résultats suivants :

— **non** (P **et** Q) $\Leftrightarrow$ (**non** P) **ou** (**non** Q),
— **non** (P **ou** Q) $\Leftrightarrow$ (**non** P) **et** (**non** Q).
— (P **et** Q)**ou** R $\Leftrightarrow$(P **ou** R) **et** (Q **ou** R).
— (P **ou** Q)**et** R $\Leftrightarrow$ (P **et** R) **ou** (Q **et** R).

Solution :

— **non** (P **et** Q) est vraie si et seulement si (P **et** Q) est fausse, c'est-à-dire si et seulement si l'une des deux propositions est fausse, soit (**non** P) **ou** (**non** Q) est vraie.
— Si l'on appelle R la proposition (**non** P) **et** S la proposition (**non** Q) on peut alors appliquer le résultat précédent, soit **non** (R **et** S) est équivalente à (**non** R) **ou** (**non** S), ou en prenant la négation (R **et** S) est équivalente à **non** ((**non** R) **ou** (**non** S)). Si l'on revient aux propositions P et Q, cela s'écrit (**non** P) **et** (**non** Q) est équivalente à **non** (P **ou** Q).

Exercice I.10 Ch1-Exercice10

Montrer que (P **et** Q)**et** R est équivalente à P **et** (Q **et** R).

Solution : (P **et** Q)**et** R est vraie si et seulement si (P **et** Q) est vraie et R est vraie, c'est à dire si et seulement si P est vraie et Q est vraie et R est vraie. Le résultat est le même pour la deuxième proposition.

Exercice I.11 Ch1-Exercice11

Montrer que si Q est toujours vraie, alors quelle que soit la proposition P on a $P \Rightarrow Q$. Illustrer ce résultat par un exemple.

Solution : $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $(nonP)ouQ$, or si Q est vraie, alors $(nonP)ouQ$ est vraie.
Ainsi $-3 > 0 \Rightarrow 10 > 0$ est une implication vraie!

Exercice I.12 Ch1-Exercice12

Soit f une fonction réelle et soient les deux propositions :

— P : f est dérivable sur $[a, b]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[a, b]$,
— Q : f est croissante sur $[a, b]$,

P est-elle une condition nécessaire de Q? (Quelle implication faut-il considérer?) P est-elle une condition suffisante de Q? Q est-elle une condition nécessaire de P? Q est-elle une condition suffisante de P? (Justifier toutes les réponses).

Solution : P n'est pas une condition nécessaire de Q car Q n'implique pas P puisqu'une fonction peut être croissante sans être dérivable. Ceci signifie aussi que Q n'est pas une condition suffisante de P.
Par contre $P \Rightarrow Q$ ce qui veut dire que Q est une condition nécessaire de P ou que P est une condition suffisante de Q.

Exercice I.13 Ch1-Exercice13

Sachant que $P \Rightarrow Q$ s'écrit ((**non** P) **ou** Q) montrer que

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\textbf{non } Q \Rightarrow \textbf{non } P)$$

Solution : De manière évidente (**non** $Q \Rightarrow$ **non** P) s'écrit (**non** (**non** Q) **ou** (**non** P)) ce qui est équivalente à ((**non** P) **ou** Q).

Exercice I.14 Ch1-Exercice14

— Montrer que si Q est une proposition fausse, alors $P \Leftrightarrow$ (P **ou** Q). Donner un exemple.
— Montrer que, si R est une proposition vraie, $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \{(P$ **et** $R) \Rightarrow Q\}$. Ainsi, pour démontrer une implication, on peut adjoindre à P toute vérité déjà établie, ce qui peut faciliter la démonstration. Donner un exemple.

Solution :

— P est vraie implique (P **ou** Q) est vraie. Réciproquement si (P **ou** Q) est vraie, puisque Q est fausse, alors P est vraie. Par exemple

$$n \text{ est pair } \Leftrightarrow n \text{ est pair } \textbf{ou } (10 \text{ est impair}).$$

— En utilisant le fait que $P \Rightarrow Q$ s'écrit (**non** P) **ou** Q et le fait que **non** $P \Leftrightarrow$ (**non** P) **ou** (**non** R) puisque R est vraie, on a

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\textbf{ non } P) \textbf{ ou } Q) \Leftrightarrow (((\textbf{ non } P) \textbf{ ou } (\textbf{ non } R)) \textbf{ ou } Q)$$

et comme

$$((\textbf{ non } P) \textbf{ ou } (\textbf{non} R) \Leftrightarrow \textbf{ non } (P \textbf{ et } R)$$

on arrive à

$$\{\textbf{non } (P \textbf{ et } R)\} \textbf{ ou } Q, \quad \text{soit} \quad (P \textbf{ et } R) \Rightarrow Q.$$

Par exemple,

le triangle Test isocèle $\Leftrightarrow$ T a deux côtés de même longueur

est équivalente à

(le triangle Test isocèle) **et** (un triangle a trois côtés) $\Leftrightarrow$ T a deux côtés de même longueur

---

Exercice I.15 Ch1-Exercice15

Montrer par contraposée que si n est un entier premier avec 6 alors n est impair. (On rappelle que n est un entier premier avec l'entier p si n et p n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1.)

Solution : Supposons que n soit un entier pair, alors n admet 2 pour diviseur qui est aussi un diviseur de 6 et donc n n'est pas premier avec 6.

Exercice I.16 Ch1-Exercice16

Démontrer par l'absurde le résultat suivant

$$(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$$

Solution : Supposons que la proposition $(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon)$ **et** $(a > b)$ est vraie. Posons $\varepsilon = a - b$, alors $a < b + (a - b)$, soit $a < a$, ce qui est absurde !

Exercice I.17 Ch1-Exercice17

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définis par : $A = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}$, est-ce que $A \subset B$ ou $B \subset A$? (Justifier le résultat.)

Solution : $B \subset A$ car si $x \in B$, alors $x \geq 1$ donc $x > 0$ soit $x \in A$.

Exercice I.18 Ch1-Exercice18

Soient $E = \{x \in \mathbb{R},\ (x > 0)\ \textbf{ou}\ (x \leq 0)\}$, montrer par double inclusion que $E = \mathbb{R}$.

Solution : On a $E \subset \mathbb{R}$ car $x \in E \Rightarrow x \in \mathbb{R}$. D'autre part si $x \in \mathbb{R}$, alors on a $(x > 0)$ **ou** $(x \leq 0)$, d'où $\mathbb{R} \subset E$.

Exercice I.19 Ch1-Exercice19

Soit $E = \mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire l'espace tout entier), soit A un plan de l'espace passant par l'origine et B une droite de l'espace passant par l'origine. Donner $A \cap B$ et $A \cup B$ en fonction de la position de la droite par rapport au plan.

Solution :

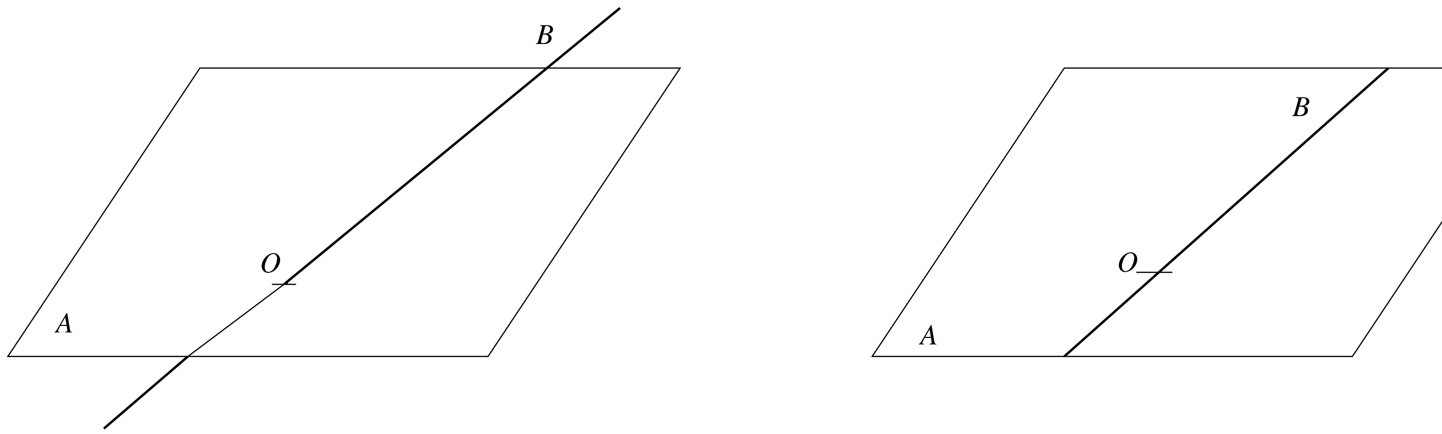

FIGURE 1.1 – plan et droite

$A \cap B = \{0\}$ si la droite n'est pas dans le plan et $A \cap B = B$ si la droite est dans le plan.
$A \cup B$ est l'ensemble des points qui sont soit dans le plan soit sur la droite si la droite n'est pas dans le plan, et $A \cup B = A$ si la droite est dans le plan.

Exercice I.20 Ch1-Exercice20

Soient A et B deux parties d'un ensemble E

1. On suppose dans cette question que $A \subset B$. Donner $A \cap B$ et $A \cup B$. Que se passe-t-il si $A = \emptyset$?
2. Montrer que

   (a)
   $$A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset \text{ et } B = \emptyset).$$

   (b)
   $$(A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset) \Rightarrow A \cap B = \emptyset.$$

   L'implication réciproque réciproque est-elle vraie ?

   (c)
   $$(A = E \text{ ou } B = E) \Rightarrow A \cup B = E.$$

   L'implication réciproque est-elle vraie ?

Solution :

1. $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$ même si $A = \emptyset$ (remarquez que la proposition $x \in (\emptyset \cap B)$ est alors toujours fausse).
2. (a) On appelle P la proposition $A \cup B = \emptyset$, Q la proposition $(A = \emptyset$ et $B = \emptyset)$, on montre non $Q \Rightarrow$ non P. En effet si A est non vide ou B non vide, il existe un x appartenant à A ou il existe un x appartenant à B, donc il existe un x appartenant à $A \cup B$ donc $A \cup B \neq \emptyset$.
   On montre de même que non $P \Rightarrow$ non Q.

   (b) On raisonne par contraposée, si $A \cap B \neq \emptyset$, alors il existe x appartenant à $A \cap B$, donc x appartient à A et x appartient à B, donc $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$.
   L'implication réciproque est fausse, choisir par exemple $E = \mathbb{R}$, $A = [0,1]$, $B = [3,4]$.

   (c) Si $A = E$ alors $A \cup B = E$, donc $A = E$ ou $B = E$ implique $A \cup B = E$, l'implication réciproque est fausse, choisir $E = \mathbb{R}$, $A = [0,+\infty[$, $B =]-\infty,2]$

Exercice I.21 Ch1-Exercice21

Pour toutes parties A, B et C de l'ensemble E, montrer les égalités ensemblistes suivantes :

— $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
— $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
— $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
— $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Solution : On raisonne par équivalence :

$$x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \textbf{ et } x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in A \textbf{ et } x \in B \textbf{ et } x \in C$$

d'où

$$x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \textbf{ et } x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$$

Il en est de même pour l'union.
Pour la troisième :

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \textbf{ et } (x \in B \textbf{ ou } x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \textbf{ et } x \in B) \textbf{ ou } (x \in A \textbf{ et } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Faire de même pour la quatrième.

Exercice I.22 Ch1-Exercice22

Pour toutes parties A et B de l'ensemble E, montrer que :

— $\complement(\complement A) = A$, $(A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A)$

— $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$, $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

Solution : Toutes les égalités se démontrent par équivalence, par exemple :

$$x \in \complement(A \cap B) \;\Leftrightarrow\; x \notin (A \cap B) \;\Leftrightarrow\; (x \notin A) \textbf{ ou } (x \notin B) \;\Leftrightarrow\; (x \in \complement A) \textbf{ ou } (x \in \complement B)$$

Exercice I.23 Ch1-Exercice23

Soit $E = \{1, 2, 3\}$, montrer, en les énumérant, que le nombre de parties de E est égal à 8.

Solution : Les parties de E sont : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, E.

Exercice I.24 Ch1-Exercice24

Montrer par récurrence la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1} b + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} a^{n-p} b^p + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} b^n$$

On rappelle que $0! = 1$, $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ et $\begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ p+1 \end{pmatrix}$.

Solution : Pour n=1, la formule donne $a + b = a + b$!
Si on suppose que la formule est vraie pour $n-1$, on démontre qu'elle est vraie pour n en écrivant

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b)$$

On regroupe les termes de la forme $a^{n-k} b^k$ qui proviennent soit de

$$a \times \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} a^{n-1-k} b^k,$$

soit de

$$b \times \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} a^{n-1-(k-1)} b^{k-1}.$$

En utilisant la relation sur les $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, on trouve le résultat.

Exercice I.25 Ch1-Exercice25

Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ est différent de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Solution : En effet le couple $(1, 1+i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ mais il n'appartient pas à $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ puisque $1+i$ n'est pas un nombre réel.

Exercice I.26 Ch1-Exercice26

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier n, formaliser le raisonnement par récurrence pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : Le raisonnement par récurrence s'écrit :

— Montrer que $P(0)$ est vraie.

— Pour $n \geq 1$, supposer que $P(n-1)$ est vraie et montrer alors que $P(n)$ est vraie.

Exercice I.27 Ch1-Exercice27

Soit P une propriété dépendant d'une variable x, et soit $A_P = \{x \in E, P(x)\}$ l'ensemble des éléments qui vérifient cette propriété. Montrer que

1. $$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (A_P \subset A_Q)$$

2. $$A_{(P \text{ ou } Q)} = A_P \cup A_Q.$$

3. $$A_{(P \text{ et } Q)} = A_P \cap A_Q.$$

4. $$A_{(\text{ non } P)} = \complement A_P.$$

Solution :

1. Il ne faut pas partir de l'hypothèse directement, mais de ce que l'on demande de démontrer. Pour montrer que $A_P \subset A_Q$, on prend un élément quelconque de A_P et on démontre qu'il est dans A_Q. En effet, si $x \in A_P$, alors $P(x)$ est vraie et donc $Q(x)$ est vraie ($P \Rightarrow Q$) ce qui implique que $x \in A_Q$.
   Faire la réciproque de la même manière.
2. $x \in A_{P\text{ou }Q} \Leftrightarrow P(x)$ ou $Q(x)$ est vraie $\Leftrightarrow x \in A_P$ ou $x \in A_Q \leftrightarrow x \in A_P \cup A_Q$.
3. les autres égalités se montrent de manière similaire.

Exercice I.28 Ch1-Exercice28

En raisonnant par double implication, montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R};\ ax^2 + bx + c = 0) \Leftrightarrow (a = 0,\ b = 0,\ c = 0).$$

Solution : Il y a de nombreuses manières de démontrer l'implication $\Rightarrow$. Par exemple

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ (obtenu pour } x = 0)$$

Si une fonction est identiquement nulle, alors sa dérivée est identiquement nulle, ... On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2ax + b = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ (obtenu à nouveau pour } x = 0)$$

et enfin $2a = 0$.
La réciproque est évidente.

Exercice I.29 Ch1-Exercice29

Soit E un ensemble et soient les deux propositions :

— $\forall x \in E$, ($P(x)$ **ou** $Q(x)$),
— ($\forall a \in E$, $P(a)$) **ou** ($\forall b \in E$, $Q(b)$).

Trouver laquelle implique l'autre. Donner un contre-exemple pour l'implication qui n'est pas valable.

Solution : La deuxième implique la première car soit tout élément de E vérifie la proposition P et donc (P ou Q), soit tout élément de E vérifie la proposition Q et donc (P ou Q).
Par contre si tout élément de E vérifie la proposition (P ou Q) cela n'entraî ne pas que tous les éléments vérifient P ou que tous les éléments vérifient Q. Par exemple soit $E = \mathbb{R}$ et soit $P(x)$ la proposition $x \geq 0$ et $Q(x)$ la proposition $x < 0$, alors tout nombre réel est soit positif ou nul, soit négatif, mais cela ne veut pas dire que tous les réels sont positifs ou nuls ou que tous les réels sont négatifs.

Exercice I.30 Ch1-Exercice30

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, montrer que : $\exists c \in \mathbb{R}, a < c < b$. La démonstration sera 'constructive', c'est-à-dire que pour démontrer l'existence d'un tel c, vous allez en donner un explicitement.

Solution : On prend $c = a + \frac{b-a}{2}$, il est facile alors de montrer que $a < c < b$.

Exercice I.31 Ch1-Exercice31

Montrer que

$$\exists x \in E, ((P(x) \textbf{ ou } Q(x)) \Leftrightarrow (\exists a \in E, P(a)) \textbf{ ou } (\exists b \in E, Q(b))$$

Solution : Pour montrer l'implication $\Rightarrow$, on appelle c l'élément de E qui vérifie (P **ou** Q). Ceci signifie que c vérifie P ou c vérifie Q de sorte que la proposition de droite est vérifiée. La réciproque se fait aussi simplement.

Exercice I.32 Ch1-Exercice32

Montrer que

$$(\exists x \in E, P(x) \textbf{ et } Q(x)) \Rightarrow (\exists a \in E, P(a)) \textbf{ et } (\exists b \in E, Q(b))$$

puis trouver un contre-exemple mathématique pour démontrer que la réciproque est fausse.

Solution : Soit c l'élément qui vérifie (P **et** Q), ceci signifie que c vérifie P et c vérifie Q de sorte que la proposition de droite est vérifiée. Par contre la réciproque n'est pas vraie car il n'y a aucune raison pour que "$a = b$" ! Par exemple si $E = \mathbb{R}$, P est la proposition $x > 0$ et Q est la proposition $x < 0$, alors il existe au moins un réel positif, il existe au moins un réel négatif, mais il n'y a aucun réel qui soit à la fois négatif et positif.

Exercice I.33 Ch1-Exercice33

Montrer que la proposition $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\, x + y = 0$ est vraie, alors que la proposition $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$ est fausse.

Solution : En effet on a $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -x$ tel que $x + y = 0$. Par contre il n'existe pas de nombre réel tel que, si on lui rajoute n'importe quel réel, le résultat soit toujours 0.

Exercice I.34 Ch1-Exercice34

Soient $l \in \mathbb{R}$ et $(u_n) = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$, une suite de nombres réels. Nous nous intéresserons plus loin dans le cours à la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon, \exists N, \forall n \geq N\,, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

que l'on peut écrire

$$\forall \varepsilon, \exists N, P(N, \varepsilon)$$

En vous aidant d'un graphique, interprétez cette proposition, puis donner sa négation en précisant ce qu'est **non** $P(N, \varepsilon)$.

Solution : La définition signifie que quel que soit l'intervalle centré en l sur la droite réelle (aussi petit soit-il !), tous les éléments de la suite sont dans cet intervalle à partir d'un certain rang. C'est en réalité la définition de la limite d'une suite. La négation de cette proposition est

$$\exists \varepsilon, \forall N, \textbf{non } P(n, \varepsilon)$$

Et la proposition **non** $P(n, \varepsilon)$ s'écrit $\exists n \geq N$ et (on dit 'tel que') $|u_n - l| > \varepsilon$.

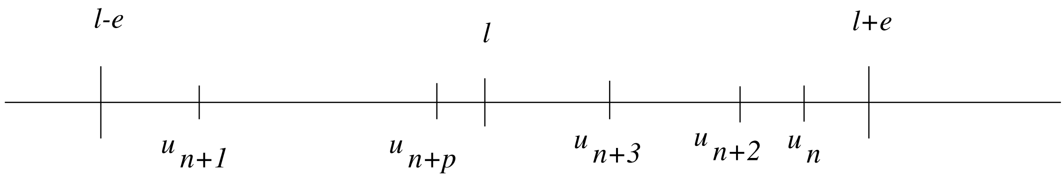

FIGURE 1.2 – convergence de la suite

Exercice I.35 Ch1-Exercice35

Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $\mathscr{R} = \{(p,q),(p',q')) \in E \times E \,|\, pq' = p'q\}$, montrer que l'on définit ainsi une relation d'équivalence.

Solution : Les propriétés de la relation d'équivalence sont trivialement vérifiées. Si tel n'est pas le cas, poser des questions !
Par exemple, la relation est réflexive car pq=pq ...
