

## *Chapitre 6 : Formules de Taylor et développements limités*

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

---

*Printemps 2018*



# Chapitre 6

## Formules de Taylor et développements limités

6.1	Les Formules de Taylor . . . . .	3
6.2	Les développements limités . . . . .	17
6.3	Applications des développements limités . . . . .	40

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.1 Les Formules de Taylor

6.1.1	La formule de Taylor pour les polynômes . . . . .	4
6.1.2	Le développement de Taylor avec reste de Lagrange . . . . .	6
6.1.3	Les développements de Mac-Laurin de l'exponentielle et du logarithme . . . . .	9
6.1.4	Les développements de Mac-Laurin des fonctions trigonométriques . . . . .	11
6.1.5	Le développement de Mac-Laurin de la fonction puissance . . . . .	13
6.1.6	Le développement de Taylor avec reste de Young . . . . .	15

Dans le cas d'un polynôme de degré  $n$ , la connaissance de la valeur de  $P$  et de ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  en un point  $a$ , permet de déterminer  $P$  en tout point  $x(= a + h) \in \mathbb{R}$ . Cette propriété n'est plus vérifiée pour une fonction quelconque. La connaissance de la valeur de  $f$  et de ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  en un point  $a$  permet seulement de connaître une *approximation de la valeur de  $f(a+h)$ , à l'ordre  $n$  en  $a$*  (on verra une définition précise de cette expression plus loin), en la confondant avec la valeur en  $h$  d'un polynôme  $P_n$ , appelé "partie régulière" de sa formule de Taylor.

## 6.1.1 La formule de Taylor pour les polynômes

Exercices :

[Exercice A.1.1](#)

**Proposition 6.1.1.** Soit  $P(x)$  une fonction polynôme de degré  $n$ , alors on a la formule

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad (6.1.1)$$

où  $P'(\cdot), P''(\cdot), \dots, P^{(n)}(\cdot)$  dénotent les fonctions dérivées successives de la fonction polynôme  $P$ .

*Démonstration* - La relation (6.1.1) est vérifiée si  $\deg P = 0$  puisque, dans ce cas  $P(x) = a_0 = P(0)$ . Supposons la vérifiée pour  $\deg P \leq n$ . Soit  $P$  de degré  $n + 1$ , on a

$$P(x) = a_{n+1}x^{n+1} + Q(x)$$

où  $Q(x)$  est de degré au plus  $n$ . Nous avons alors la relation (voir exercice)

$$\frac{d^k}{dx^k} x^{n+1} = (n+1)n(n-1)\cdots(n+2-k)x^{n+1-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

ce qui implique

$$P^{(k)}(0) = Q^{(k)}(0), \quad \forall k = 0, 1, \dots, n \text{ et } P^{(n+1)}(0) = a_{n+1}(n+1)!.$$

Alors, en utilisant aussi l'hypothèse de récurrence sur  $Q$ , nous arrivons à

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n + a_{n+1}x^{n+1}.$$

soit

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{P^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

## La formule de Taylor pour les polynômes

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.1.2 Le développement de Taylor avec reste de Lagrange

### Exercices :

[Exercice A.1.2](#)[Exercice A.1.3](#)[Exercice A.1.4](#)

### Documents :

[Document C.1.1](#)

**Théorème 6.1.1** (Formule de Taylor-Lagrange). *Soit  $f$  une fonction  $n + 1$  fois dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$ . Alors quel que soit  $h$ , tel que  $a + h \in I$ , il existe un  $\theta \in ]0, 1[$ , tel que :*

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h). \quad (6.1.2)$$

Remarquons que  $\theta$  dépend de  $h$ . Avant de démontrer ce résultat, donnons la définition :

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Définition 6.1.1.** L'expression (6.1.2) s'appelle le **développement de Taylor de  $f$ , à l'ordre  $n$ , au point  $x = a$  avec reste de Lagrange**. Le polynôme en  $h$

$$P_n(h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

s'appelle la **partie régulière** de ce développement et la différence

$$f(a+h) - P_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

s'appelle le **reste de Lagrange de la formule de Taylor**.

*Démonstration du théorème* - On remarque que si  $h = 0$ , la formule est évidemment vérifiée, on suppose maintenant  $h \neq 0$ . Soient donc  $a$  et  $h$  fixés (avec  $a \in I$  et  $a+h \in I$ ). Définissons tout d'abord le nombre  $C$  par l'égalité

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + C \frac{h^{n+1}}{(n+1)!},$$

Nous allons démontrer que  $C$  peut s'écrire :

$$C = f^{(n+1)}(a+\theta h) \text{ avec } \theta \in ]0, 1[.$$

Introduisons la fonction  $\varphi$  suivante

$$\varphi(x) = f(a+x) - f(a) - \frac{x}{1!} f'(a) - \frac{x^2}{2!} f''(a) - \cdots - \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a) - C \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**Le  
développement  
de Taylor avec  
reste de  
Lagrange**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Notons que  $\varphi$  est une fonction qui admet des dérivées jusqu'à l'ordre  $n + 1$  sur  $I$ , puisque  $f$  est  $(n + 1)$  fois dérivable et que les autres termes sont des monômes en la variable  $x$ . D'autre part  $\varphi(h) = 0$  et,

$$\forall k = 0, 1, \dots, n \quad \varphi^{(k)}(0) = 0,$$

ce qui permet d'appliquer le théorème de Rolle  $n + 1$  fois (voir le document référencé) et donne ainsi l'existence de  $c$  compris entre 0 et  $h$  tel que

$$\varphi^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(a + c) - C = 0,$$

ce qui montre que

$$C = f^{(n+1)}(a + c) \quad \text{avec} \quad c \text{ compris entre } 0 \text{ et } h.$$

ce qui s'écrit aussi :

$$C = f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad \text{avec} \quad \theta \in ]0, 1[.$$

**Proposition 6.1.2** (Formule de Mac-Laurin). *Sous les hypothèses du théorème précédent et si  $0 \in I$ , alors pour tout  $x \in I$  on a*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad (6.1.3)$$

avec  $\theta \in ]0, 1[$  ( $\theta$  dépend de  $x$ ).

## Le développement de Taylor avec reste de Lagrange

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.1.3 Les développements de Mac-Laurin de l'exponentielle et du logarithme

**Exercices :**  
[Exercice A.1.5](#)

**Exemples :**  
[Exemple B.1.1](#)

La fonction  $e^x$  admet, quel que soit  $n$ , une dérivée d'ordre  $n$  toujours égale à  $e^x$ . On obtient donc immédiatement son développement de Taylor-Lagrange :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in ]0, 1[, e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

La fonction définie par  $f(x) = \ln(1+x)$  est dérivable et les dérivées s'écrivent :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x}, & f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, & f^{(4)}(x) &= -\frac{3!}{(1+x)^4}, \dots \end{aligned}$$

soit

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

d'où, pour  $x = 0$ ,

$$f(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Ceci nous conduit au développement de Taylor-Lagrange suivant pour  $\ln(1+x)$  :

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-1, +\infty[, \exists \theta \in ]0, 1[, \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \end{aligned}$$

**Les développements de Mac-Laurin de l'exponentielle et du logarithme**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.1.4 Les développements de Mac-Laurin des fonctions trigonométriques

**Exercices :**  
[Exercice A.1.6](#)

**Exemples :**  
[Exemple B.1.2](#)

Les dérivées de  $\cos x$  s'écrivent :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad f^{(2p)}(x) = (-1)^p \cos x, \quad f^{(2p+1)}(x) = (-1)^{p+1} \sin x,$$

de sorte que

$$f^{(2p)}(0) = (-1)^p, \quad f^{(2p+1)}(0) = 0.$$

Comme nous pouvons développer à un ordre pair ou impair, nous allons obtenir deux expressions de ce développement. Développons tout d'abord à un ordre pair  $n = 2p$  :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in ]0, 1[, \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \sin(\theta x), \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Développons maintenant  $\cos x$  à un ordre impair  $n = 2p + 1$ . Comme la dernière contribution non nulle à la partie régulière du développement est obtenue pour l'ordre  $2p$ , nous obtenons

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

cette fois-ci :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in ]0, 1[, \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} \cos(\theta x), \quad (6.1.5)$$

On notera que les parties régulières des formules (6.1.4) et (6.1.5) sont identiques. La façon d'écrire le reste dépend de l'ordre.

Les dérivées de  $\sin x$  s'écrivent :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad f^{(2p)}(x) = (-1)^p \sin x, \quad f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \cos x,$$

de sorte que

$$f^{(2p)}(0) = 0, \quad f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p.$$

Nous pouvons développer  $\sin x$ , tout comme  $\cos x$  précédemment, à un ordre pair ou impair et obtenir ainsi deux expressions de ce développement.

Développons tout d'abord  $\sin x$  jusqu'à un ordre impair  $n = 2p - 1$  :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} \sin(\theta x).$$

Développons maintenant  $\sin x$  jusqu'à un ordre pair  $n = 2p$  :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \cos(\theta x).$$

## Les développements de Mac-Laurin des fonctions trigonométriques

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.1.5 Le développement de Mac-Laurin de la fonction puissance

### Exercices :

#### [Exercice A.1.7](#)

Soit la fonction  $f(x) = (1+x)^\alpha$ .

Commençons par  $\alpha = m \in \mathbb{N}$ ,

$$f^{(p)}(0) = m(m-1)\cdots(m-p+1), \quad 0 \leq p \leq m,$$

$$f^{(p)}(0) = 0, \quad m+1 \leq p.$$

Ceci nous conduit aux développements suivants pour  $(1+x)^m$  :

- Si  $0 \leq p \leq m-1$

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{p!}x^p \\ &+ \frac{m(m-1)\cdots(m-p)}{(p+1)!}x^{p+1}(1+\theta x)^{m-p-1}. \end{aligned}$$

- Si  $m \leq p$ , il vient (et on reconnaît la formule du binôme de Newton)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \cdots + x^m.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Soit maintenant  $\alpha \in \mathbb{R}$ , alors  $(1+x)^\alpha$  est définie (pour  $x > -1$ ) par :

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$$

On voit ainsi (le calculer) que les dérivées s'écrivent :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}, & f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ f^{(p)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)(1+x)^{\alpha-p}. \end{aligned}$$

d'où, pour  $x=0$ ,

$$f^{(p)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1).$$

Ceci nous conduit au développement suivant pour  $(1+x)^\alpha$  :

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)}{p!}x^p \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p)}{(p+1)!}x^{p+1}(1+\theta x)^{\alpha-p-1}. \end{aligned}$$

## Le développement de Mac-Laurin de la fonction puissance

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.1.6 Le développement de Taylor avec reste de Young

**Exercices :**  
[Exercice A.1.8](#)

**Exemples :**  
[Exemple B.1.3](#)

**Théorème 6.1.2** (Développement de Taylor-Young). *Soient  $f$  une fonction  $n$  fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ ,  $a \in I$  et  $h$  tel que  $a + h \in I$ . Alors, il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

*et on peut écrire le développement de Taylor de  $f$  à l'ordre  $n$  sous la forme :*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots \quad (6.1.6)$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + h^n \varepsilon(h) \quad (6.1.7)$$

*Démonstration* - D'après les hypothèses faites on peut écrire le développement de Taylor avec reste de Lagrange de  $f$  au point  $a$  à l'ordre  $n-1$  :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

avec  $\theta \in ]0, 1[$ . On pose

$$\varepsilon(h) = \frac{f^{(n)}(a + \theta h) - f^{(n)}(a)}{n!}$$

$\theta$  (qui dépend de  $h$ ) est borné, donc  $\lim_{h \rightarrow 0} (a + \theta h) = a$ , d'autre part  $f^{(n)}$  est continue, donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  et

$$f^{(n)}(a + \theta h) = f^{(n)}(a) + n! \varepsilon(h).$$

Le développement de Taylor-Young est surtout utilisé lorsque l'on veut étudier le comportement de  $f$  au voisinage du point  $a$ . La formule (6.1.7) n'a d'intérêt que pour  $h$  petit, sinon comme elle ne donne aucune information sur la fonction  $\varepsilon(\cdot)$ , elle n'a pas grande utilité. C'est donc une représentation *locale* de  $f$ , par opposition au développement de Taylor-Lagrange ou Mac-Laurin qui eux donnent une représentation globale de  $f$ .

## Le développement de Taylor avec reste de Young

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2 Les développements limités

6.2.1	Définition des infiniment petits et infiniment grands . . . . .	18
6.2.2	Fonctions équivalentes . . . . .	20
6.2.3	Ordre d'un infiniment petit . . . . .	22
6.2.4	Définition des développements limités . . . . .	25
6.2.5	Remarques sur les développements limités . . . . .	27
6.2.6	Unicité du développement limité . . . . .	29
6.2.7	Opérations sur les développements limités . . . . .	31
6.2.8	Quotient de développements limités . . . . .	33
6.2.9	Composition des développements limités . . . . .	36
6.2.10	Intégration des développements limités . . . . .	38

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2.1 Définition des infiniment petits et infiniment grands

Exercices :

[Exercice A.1.9](#)

**Définition 6.2.1.** *On dit que la fonction  $f$  (ou, que  $f(x)$ ) est un **infiniment petit au voisinage de  $a$**  si*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

*De même on dit que  $f(x)$  est un **infiniment grand au voisinage de  $a$**  si*

$$|f(x)| \rightarrow +\infty \quad \text{quand } x \rightarrow a.$$

*La définition s'étend de façon naturelle au cas où  $a = \pm\infty$ .*

Si la fonction  $f$  est un infiniment grand au voisinage de  $a$ , alors la fonction  $1/f$  est un infiniment petit au voisinage de  $a$  et inversement. On peut donc systématiquement ramener l'étude des infiniment grands à celle des infiniment petits, c'est ce que nous ferons dans la suite.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Définition 6.2.2.** On dit que les deux infiniment petits, au voisinage de  $a$ ,  $f(x)$  et  $g(x)$  **sont du même ordre** s'il existe  $l \in \mathbb{R}$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l, \quad \text{avec } l \neq 0.$$

Par exemple, au voisinage de 0 les infiniment petits  $\sin x$  et  $x$  sont du même ordre puisque nous avons montré au chapitre précédent que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

De même les infiniment petits  $1 - \cos x$  et  $x^2$  sont du même ordre puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

**Définition des  
infiniment  
petits et  
infiniment  
grands**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2.2 Fonctions équivalentes

**Définition 6.2.3.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies dans un voisinage de  $a \in \mathbb{R}$ , sauf éventuellement en  $a$ . On dit que  $f$  et  $g$  sont **équivalentes** au voisinage de  $a$  et on écrit  $f \sim g$ , si  $g$  est non nulle au voisinage de  $a$  (sauf éventuellement en  $a$ ) et si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad (6.2.1)$$

— **Attention** : le fait que  $f(a) = g(a)$  n'implique pas (6.2.1); un contre-exemple trivial est donné par :

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x,$$

alors  $f(0) = g(0)$  et pourtant

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

- D'après cette définition, *aucune* fonction n'est équivalente à la fonction nulle.
- L'exemple ci-dessus montre aussi que la relation (6.2.1) n'est pas équivalente à

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = 0.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Définition 6.2.4.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $[\omega_0, +\infty[$ . On dit que  $f$  et  $g$  sont **équivalentes** quand  $x \rightarrow +\infty$  (équivalentes au voisinage de l'infini) et on écrit  $f \sim g$ , si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Cette définition 6.2.4 n'implique pas que les limites de  $f(x)$  et  $g(x)$  soient définies : donnons un contre exemple

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x$$

alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty$$

et pourtant ni  $f$  ni  $g$  n'a de limite quand  $x \rightarrow +\infty$ . Même remarque concernant la définition précédente.

## Fonctions équivalentes

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2.3 Ordre d'un infiniment petit

### Exercices :

[Exercice A.1.10](#)[Exercice A.1.11](#)[Exercice A.1.12](#)[Exercice A.1.13](#)

**Définition 6.2.5.** Soit  $f(x)$  un infiniment petit au voisinage de  $a$ , on dit que  $f$  est **d'ordre  $p$** , si les infiniment petits  $f(x)$  et  $(x - a)^p$  sont du même ordre. Dans ce cas si on pose  $h = x - a$ , on peut écrire

$$f(a + h) = \alpha h^p + h^p \varepsilon(h), \quad \text{avec } \alpha \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

et  $\alpha(x - a)^p$  est appelée **partie principale** de l'infiniment petit  $f(x)$  au voisinage de  $a$ .

Il est clair que  $1 - \cos x$  est un infiniment petit d'ordre 2 au voisinage de 0 puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ .

Lorsque  $f(x)$  est un infiniment petit au voisinage de  $a$ , on pose

$$g(h) = f(a + h).$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Alors  $g(h)$  est un infiniment petit au voisinage de 0. L'ordre de  $f(x)$  est alors, par définition, l'ordre de  $g$ .

**Proposition 6.2.1.** *Les opérations sur les infiniment petits : addition, multiplication par un réel, multiplication, quotient, conduisent aux résultats suivants (en supposant que les ordres écrits soient bien définis). On suppose que  $f(x)$  et  $g(x)$  sont des infiniment petits au voisinage de 0, on note  $\text{Ordre}(f(x))$ ,  $\text{Ordre}(g(x))$ , leurs ordres respectifs :*

- i/  $\text{Ordre}(f(x) + g(x)) \geq \min(\text{Ordre}(f(x)), \text{Ordre}(g(x)))$ ,
- ii/ Pour tout  $\lambda \neq 0$ ,  $\text{Ordre}(\lambda f(x)) = \text{Ordre}(f(x))$ ,
- iii/  $\text{Ordre}(f(x)g(x)) = \text{Ordre}(f(x)) + \text{Ordre}(g(x))$ ,
- iv/ Si  $f$  est d'ordre strictement supérieur à  $g$ ,

$$\text{Ordre}(f(x)/g(x)) = \text{Ordre}(f(x)) - \text{Ordre}(g(x)).$$

*Démonstration* - La démonstration est immédiate à partir des résultats sur les limites. à titre d'exercice montrons la première propriété. Supposons qu'au voisinage de 0

$$\text{Ordre}(f(x)) = m, \quad \text{Ordre}(g(x)) = n,$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = \alpha x^m + x^m \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \beta x^n + x^n \varepsilon_2(x).$$

1. Si  $m \neq n$ , sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que  $m < n$ . Il vient alors :

$$(f + g)(x) = \alpha x^m + x^m \varepsilon(x),$$

## Ordre d'un infiniment petit

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

avec  $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + x^{n-m}(\beta + \varepsilon_2(x))$ .

De façon plus précise, on vient de montrer que si  $f(x)$  et  $g(x)$  sont d'ordres différents alors on a

$$\text{Ordre}(f(x) + g(x)) = \min(\text{Ordre}(f(x)), \text{Ordre}(g(x))).$$

2. Par contre, si  $m = n$ , on a

$$(f + g)(x) = (\alpha + \beta)x^m + x^m(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)).$$

Deux cas se présentent :

- (a) Si  $(\alpha + \beta) \neq 0$ ,  $(f + g)(x)$  est d'ordre  $m$ .
- (b) Si  $(\alpha + \beta) = 0$ , il faut étudier l'ordre de  $\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$ , si cet ordre existe et vaut  $p$ , alors  $(f + g)(x)$  est d'ordre  $m + p > m$

Une remarque concernant iv/, si  $f$  est d'ordre inférieur ou égal à l'ordre de  $g$ , alors  $\frac{f(x)}{g(x)}$  n'est pas un infiniment petit.

## Ordre d'un infiniment petit

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2.4 Définition des développements limités

**Exercices :**

[Exercice A.1.14](#)

**Définition 6.2.6.** *On dit que la fonction  $f$  admet un **développement limité à l'ordre  $n$**  ( $n \in \mathbb{N}$ ) **au voisinage de  $a$**  (ou plus simplement en  $a$ ), si  $f$  est définie dans un voisinage de  $a$  et si l'on peut écrire dans ce voisinage*

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h), \quad (6.2.2)$$

où,  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ . L'expression polynomiale

$$P(h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n$$

est appelée **partie régulière** du développement limité et  $h^n \varepsilon(h)$  est le terme **complémentaire**.

Le terme  $h^n \varepsilon(h)$  s'écrit aussi  $o(h^n)$  ou  $h^n o(1)$ . En effet la fonction  $o(h^k)$  est définie par

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^k)}{h^k} = 0.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Ainsi  $o(1)$  est telle que  $\lim_{h \rightarrow 0} o(1) = 0$  ce qui veut dire que  $o(1) = \varepsilon(h)$ .

La forme de (6.2.2) suggère que la formule de Taylor-Young est particulièrement bien adaptée pour trouver le développement limité. Par exemple, on obtient aisément le développement limité de :

$$(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} h^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)}{p!} h^p + h^p \varepsilon(h).$$

**Définition 6.2.7.** On dit que la fonction  $f$  admet un **développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de  $+\infty$** , si l'on peut écrire pour  $x$  suffisamment grand :

$$f(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \dots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

## Définition des développements limités

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2.5 Remarques sur les développements limités

### Exercices :

[Exercice A.1.15](#)

- Attention, dans la définition du développement limité, il n'est pas dit que  $\alpha_n \neq 0$ . Autrement dit, la partie régulière d'un développement limité à l'ordre  $n$  est un polynôme en  $h$ , de degré *inférieur ou égal* (mais non nécessairement égal) à  $n$  (voir exercice).
- Il est clair que si  $f$  a une limite quand  $x \rightarrow a$ , elle admet un développement limité au moins à l'ordre 0 en  $a$ . Inversement, si  $f$  admet un développement limité en  $a$ , cela implique que la fonction  $f(x)$  a une limite ( $= \alpha_0$ ) quand  $x \rightarrow a$ . Le développement limité donne, en particulier, l'ordre de l'infiniment petit  $f(x) - f(a)$  au voisinage de  $a$  si le polynôme  $Q(h) = P(h) - \alpha_0$  n'est pas nul. En effet on peut écrire

$$f(a+h) - \alpha_0 = \alpha_1 h + \dots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h)$$

et donc l'ordre de  $f(a+h) - \alpha_0$  est donné par la *valuation* du polynôme  $Q$ , c'est-à-dire le plus petit indice  $j$  des coefficients  $\alpha_j$  non nuls dans  $Q$ .

- Une fonction n'admet pas nécessairement un développement limité à un même ordre en tout point. Par exemple la fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  admet un développement limité à n'importe quel ordre en tout point  $a > 0$ , mais en 0 elle n'admet qu'un développement à l'ordre 0. En effet si un développement de  $f$  à un ordre  $n \geq 1$  existait en 0 on aurait pour  $x > 0$  :

$$\sqrt{x} = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

(comme  $f(0) = 0$  on a nécessairement  $\alpha_0 = 0$ ) et en divisant les deux membres par  $\sqrt{x}$ , il viendrait :

$$1 = \alpha_1 \sqrt{x} + \alpha_2 x^{3/2} + \dots + \alpha_n x^{n-1/2} + x^{n-1/2} \varepsilon(x),$$

ce qui est impossible (il suffit de prendre la limite quand  $x \rightarrow 0$ ).

## Remarques sur les développements limités

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2.6 Unicité du développement limité

**Exercices :**

[Exercice A.1.16](#)

**Documents :**

[Document C.1.2](#)

**Proposition 6.2.2.** *Le développement limité à un ordre  $n$  donné, s'il existe, est unique.*

*Démonstration* - Supposons que  $f$  admette un autre développement

$$f(a+h) = \beta_0 + \beta_1 h + \cdots + \beta_n h^n + h^n \tilde{\varepsilon}(h),$$

alors par différence nous aurions

$$0 = \alpha_0 - \beta_0 + (\alpha_1 - \beta_1)h + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)h^n + h^n(\varepsilon(h) - \tilde{\varepsilon}(h)). \quad (6.2.3)$$

En prenant la limite de (6.2.3) quand  $h \rightarrow 0$ , nous trouvons

$$0 = \alpha_0 - \beta_0$$

et donc (6.2.3) peut se récrire, en divisant par  $h (\neq 0)$ ,

$$0 = \alpha_1 - \beta_1 + (\alpha_2 - \beta_2)h + \dots + (\alpha_n - \beta_n)h^{n-1} + h^{n-1}(\varepsilon(h) - \tilde{\varepsilon}(h)). \quad (6.2.4)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Mais en prenant à nouveau la limite de (6.2.4) quand  $h \rightarrow 0$  nous trouvons  $\alpha_1 = \beta_1$ . Ainsi de proche en proche nous aboutissons à

$$0 = \alpha_n - \beta_n + \varepsilon(h) - \tilde{\varepsilon}(h),$$

ce qui, en prenant la limite quand  $h \rightarrow 0$ , donne  $\alpha_n = \beta_n$ , d'où finalement

$$0 = \varepsilon(h) - \tilde{\varepsilon}(h),$$

ce qui montre bien que  $\varepsilon(h) = \tilde{\varepsilon}(h)$ .

**Proposition 6.2.3.** *La partie régulière du développement limité, au voisinage de 0, d'une fonction paire (resp. impaire) ne contient que des termes pairs (resp. impairs).*

La démonstration est donnée dans le document référencé. Mais attention, ceci ne prouve pas que pour une fonction paire un développement limité à l'ordre  $2n$  s'étend toujours à l'ordre  $(2n + 1)$  avec un dernier coefficient nul. La fonction

$$f(x) = x^2 \sqrt{|x|}$$

par exemple est paire, admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 (avec partie régulière nulle) mais n'admet pas en 0 de développement limité à l'ordre 3.

## Unicité du développement limité

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2.7 Opérations sur les développements limités

**Exercices :**

[Exercice A.1.17](#)

**Théorème 6.2.1.** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre  $n$  au point  $a$  :*

$$f(a+h) = P(h) + h^n \varepsilon_1(h),$$

$$g(a+h) = Q(h) + h^n \varepsilon_2(h)$$

*où  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes, de degrés au plus  $n$ , qui représentent les parties régulières de  $f$  et  $g$ . Alors :*

- La fonction  $f+g$  admet en  $a$  un développement limité à l'ordre  $n$  dont la partie régulière est  $P+Q$ .*
- Le produit  $\lambda f$  ( $\lambda$  réel) admet en  $a$  un développement limité à l'ordre  $n$  dont la partie régulière est  $\lambda P$ .*
- Le produit  $f.g$  admet en  $a$  un développement limité à l'ordre  $n$  dont la partie régulière est obtenue en tronquant à l'ordre  $n$  le produit  $PQ$ .*

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

*Démonstration* - La démonstration des deux premiers points est évidente. Pour le produit on écrit

$$f(a+h)g(a+h) = P(h)Q(h) + h^n (P(h)\varepsilon_2(h) + Q(h)\varepsilon_1(h) + h^n\varepsilon_2(h)\varepsilon_1(h)). \quad (6.2.5)$$

Or on peut écrire

$$P(x)Q(x) = \Pi(x) + x^{n+1}R(x)$$

où  $\Pi(x)$  est le polynôme obtenu en ne gardant que les termes de degré  $\leq n$  du produit  $PQ$ . Dans ces conditions, en posant

$$\varepsilon(h) \stackrel{\text{déf}}{=} hR(h) + P(h)\varepsilon_2(h) + Q(h)\varepsilon_1(h) + h^n\varepsilon_2(h)\varepsilon_1(h)$$

nos pouvons récrire (6.2.5) sous la forme

$$f(a+h)g(a+h) = \Pi(h) + h^n\varepsilon(h),$$

ce qui constitue le développement limité du produit  $fg$ .

## Opérations sur les développements limités

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2.8 Quotient de développements limités

**Exercices :**

[Exercice A.1.18](#)

**Exemples :**

[Exemple B.1.4](#)

Dans ce paragraphe, nous avons besoin de préciser la notion de la division suivant les **puissances croissantes** des polynômes. Regarder l'exemple référencé pour comprendre la façon pratique de mener les calculs.

**Proposition 6.2.4.** *Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes, on suppose que le terme constant de  $B$  n'est pas nul. Alors quel que soit l'entier  $k \geq 0$ , il existe un couple unique de polynômes  $(Q, R)$  tel que*

$$A(x) = B(x)Q(x) + x^{k+1}R(x), \text{ avec } \begin{cases} \text{ou } Q = 0 \\ \text{ou } \deg Q \leq k \end{cases}$$

*Les polynômes  $Q$  et  $R$  s'appellent respectivement le quotient et le reste de la division de  $A$  par  $B$  suivant les **puissances croissantes à l'ordre  $k$** .*

La démonstration, qui n'est pas donnée, repose sur la même démarche que la division euclidienne. La principale différence consiste à ranger les termes des polynômes par ordre croissant de leurs degrés. Nous pouvons remarquer sur l'exemple référencé que le degré le plus bas des restes

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

intermédiaires  $R_i$  augmente avec  $i$ . On arrête la division quand ce reste admet comme terme de plus bas degré un monôme de degré  $\geq k + 1$ . On pose alors  $R_i(x) = x^{k+1}R(x)$ .

**Théorème 6.2.2.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre  $n$  au point  $a$ . On suppose en plus que  $g(a) \neq 0$ . Alors, le quotient  $f/g$  admet en  $a$  un développement limité à l'ordre  $n$  dont la partie régulière est obtenue comme quotient de la division suivant les **puissances croissantes**, à l'ordre  $n$ , de  $P$  par  $Q$ .

*Démonstration* - écrivons les développements limités de  $f$  et  $g$  sous la forme

$$f(a+h) = A(h) + h^n \varepsilon_1(h), \quad g(a+h) = B(h) + h^n \varepsilon_2(h),$$

comme  $B(0)$  est non nul, nous pouvons effectuer la division suivant les puissances croissantes de  $A$  par  $B$  à l'ordre  $n$  :

$$A(h) = B(h)Q(h) + h^{n+1}R(h) \quad \text{avec} \quad \deg Q \leq n.$$

Nous pouvons donc écrire

$$f(a+h) = B(h)Q(h) + h^{n+1}R(h) + h^n \varepsilon_1(h)$$

d'où

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (g(a+h) - h^n \varepsilon_2(h)) Q(h) + h^n (hR(h) + \varepsilon_1(h)) \\ &= g(a+h)Q(h) + h^n (hR(h) + \varepsilon_1(h) - Q(h)\varepsilon_2(h)) \end{aligned}$$

## Quotient de développements limités

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

ce qui se met sous la forme

$$f(a+h) = g(a+h)Q(h) + h^n \varepsilon_3(h) \quad (6.2.6)$$

Par ailleurs, comme nous avons supposé que  $g(a) \neq 0$ , cela implique que

$$\varepsilon(h) \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon_3(h)/g(a+h) \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow 0,$$

ce qui permet, en divisant les deux membres de (6.2.6) par  $g(a+h)$  d'obtenir

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = Q(h) + h^n \varepsilon(h)$$

ce qui montre le résultat.

## Quotient de développements limités

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2.9 Composition des développements limités

**Exercices :**

[Exercice A.1.19](#)

**Exemples :**

[Exemple B.1.5](#)

**Théorème 6.2.3.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant des développements limités, notés

$$f(a+h) = \alpha_0 + R(h) + h^n \varepsilon_1(h),$$

où  $R$  est un polynôme de degré  $\leq n$  et de valuation  $\geq 1$ ,

$$g(\alpha_0 + \delta) = Q(\delta) + \delta^n \varepsilon_2(\delta),$$

où  $Q$  est un polynôme de degré  $\leq n$ . Alors la fonction  $\varphi = (g \circ f)$  admet au voisinage de  $a$  un développement limité, à l'ordre  $n$ , de la forme

$$\varphi(a+h) = S(h) + h^n \varepsilon(h),$$

où le polynôme  $S$  est obtenu en ne gardant que les  $n+1$  termes de degré  $\leq n$  du polynôme  $Q \circ R$ .

*Démonstration* - On a

$$\varphi(a+h) = g(f(a+h)) = g(\alpha_0 + R(h) + h^n \varepsilon_1(h)) = Q(\lambda(h)) + \lambda^n(h) \varepsilon_2(\lambda(h)),$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

où l'on a posé

$$\lambda(h) = R(h) + h^n \varepsilon_1(h),$$

(on a, en particulier,  $\lambda(h) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ , puisque la valuation de  $R$  est  $\geq 1$ ). Il est clair que l'on peut écrire (utilisant par exemple la formule des accroissements finis)

$$Q(\lambda(h)) = Q(R(h) + h^n \varepsilon_1(h)) = Q(R(h)) + h^n \varepsilon_3(h) = S(h) + h^n \varepsilon_4(h)$$

où  $S$  est le polynôme  $Q(R)$  tronqué à l'ordre  $n$  et que l'on a également

$$\lambda^n(h) = (R(h) + h^n \varepsilon_1(h))^n = h^n \varepsilon_5(h),$$

(on utilise encore le fait que la valuation de  $R$  est  $\geq 1$ ). En regroupant ce qui précède on obtient

$$\varphi(a+h) = S(h) + h^n \varepsilon_4(h) + h^n \varepsilon_5(h) \varepsilon_2(\lambda(h)) = S(h) + h^n \varepsilon(h).$$

## Composition des développe- ments limités

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.2.10 Intégration des développements limités

**Exercices :**

[Exercice A.1.20](#)

**Théorème 6.2.4.** *Soit  $f$  une fonction continue au voisinage de  $a$ , admettant un développement limité à l'ordre  $n$  :*

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h),$$

*alors toute primitive  $F$  de  $f$  admet le développement limité à l'ordre  $n+1$  :*

$$F(a+h) = F(a) + \alpha_0 h + \alpha_1 \frac{h^2}{2} + \cdots + \alpha_n \frac{h^{n+1}}{n+1} + h^{n+1} \tilde{\varepsilon}(h).$$

*Démonstration* - La fonction

$$f(a+h) - (\alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n) (= h^n \varepsilon(h))$$

admet comme primitive s'annulant en zéro

$$F(a+h) - \left( \alpha_0 h + \alpha_1 \frac{h^2}{2} + \cdots + \alpha_n \frac{h^{n+1}}{n+1} \right) - F(a)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

La formule des accroissements finis permet alors d'écrire :

$$F(a+h) - \left( \alpha_0 h + \alpha_1 \frac{h^2}{2} + \cdots + \alpha_n \frac{h^{n+1}}{n+1} \right) - F(a) = h((\theta h)^n \varepsilon(\theta h)),$$

avec  $\theta \in ]0, 1[$ . Comme  $(h \rightarrow 0) \Rightarrow (\theta h \rightarrow 0)$ , nous avons bien le résultat annoncé :

$$F(a+h) - F(a) - \left( \alpha_0 h + \cdots + \alpha_n \frac{h^{n+1}}{n+1} \right) = h^{n+1} \tilde{\varepsilon}(h).$$

avec  $\tilde{\varepsilon}(h) = \theta^n \varepsilon(\theta h)$ .

Attention, il n'y a pas de résultat analogue sur la dérivation. Plus précisément, une fonction  $f$  peut être dérivable au voisinage de zéro et admettre un développement limité d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  au voisinage de zéro, sans que  $f'$  admette de développement limité en zéro. Par exemple, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 :

$$f(x) = x + x\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par contre,  $f'$  n'est pas continue en 0 et n'admet pas de développement limité d'ordre 0.

## Intégration des développements limités

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 6.3 Applications des développements limités

6.3.1	Calcul de limites par développements limités . . . . .	41
6.3.2	Etude locale d'une courbe . . . . .	43
6.3.3	Etude des branches infinies d'une courbe . . . . .	45

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.3.1 Calcul de limites par développements limités

**Exemples :**

[Exemple B.1.6](#)

Nous avons vu aux chapitres 3 et 4 des **formes indéterminées**

$$\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{0}{0}.$$

Une autre forme indéterminée est  $1^\infty$  (prenant son logarithme, on retrouve la forme  $0 \times \infty$ ). Pour lever l'indétermination de la forme  $\infty - \infty$ , on met en facteur l'un des deux termes, généralement "le plus grand", et on ramène au cas  $\frac{\infty}{\infty}$ , qui n'est autre que  $\frac{0}{0}$  écrit d'une autre façon, puis éventuellement au cas  $0 \times \infty$ , qui se ramène encore au cas  $\frac{0}{0}$ . Pour lever l'indétermination de cette dernière forme, un moyen efficace consiste à mettre en évidence les parties principales des infiniment petits au numérateur et dénominateur. Ceci s'obtient bien souvent en utilisant les développements limités. Voici deux exemples simples dont l'un est traité ici et l'autre dans l'exemple référencé.

Soit à déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{Arctan } x}{x^2 \sin x},$$

qui est une forme indéterminée de la forme  $0/0$ . Calculant le développement limité de la fonction  $\text{Arctan}$  à l'ordre 3, nous obtenons pour le numérateur

$$x - \text{Arctan } x = \frac{x^3}{3}(1 + \varepsilon_1(x)),$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

tandis que le dénominateur s'écrit, à partir du développement de  $\sin x$  :

$$x^2 \sin x = x^3(1 + \varepsilon_2(x)).$$

D'où le résultat, en simplifiant par  $x^3$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^2 \sin x} = \frac{1}{3}.$$

## Calcul de limites par dé- veloppements limités

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.3.2 Etude locale d'une courbe

L'équation de la tangente en  $x_0$  à la courbe  $(C)$ , d'équation  $y = f(x)$ , est donnée par

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Pour situer la courbe par rapport à cette tangente, nous devons donc estimer la différence

$$D = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)),$$

pour les  $x$  proches de  $x_0$ . Or, la formule de Taylor-Young donne :

$$D = \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + (x - x_0)^2 \varepsilon(x - x_0) = (x - x_0)^2 \left( \frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(x - x_0) \right).$$

Distinguons plusieurs cas :

- a/  $f''(x_0) > 0$ . Pour  $x$  suffisamment proche de  $x_0$ ,  $D$  est strictement positif : la courbe est située au dessus de la tangente (elle est convexe dans un voisinage de  $x_0$ ).
- b/  $f''(x_0) < 0$ . La courbe est au-dessous de sa tangente.
- c/  $f''(x_0) = 0$ . Supposons  $f'''(x_0) \neq 0$ , on écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre 3, et l'on voit sans difficulté que  $D$  change de signe quand  $x$  approche  $x_0$  d'abord par valeurs plus petites puis par valeurs plus grandes que  $x_0$ . La courbe traverse sa tangente au point  $x_0$ . On a un point d'inflexion.

Le développement de Taylor Young permet également d'étudier les extrema, on a vu qu'une condition nécessaire est que  $f'(x_0) = 0$ . On a alors  $D = f(x) - f(x_0)$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

- a/ Si  $f''(x_0) > 0$ . Pour  $x$  suffisamment proche de  $x_0$ ,  $D$  est strictement positif :  $x_0$  réalise un minimum local.
- b/ Si  $f''(x_0) < 0$ ,  $x_0$  réalise un maximum local.
- c/ Si  $f''(x_0) = 0$  et  $f'''(x_0) \neq 0$ , on a un point d'inflexion, donc pas d'extremum.

## Etude locale d'une courbe

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### 6.3.3 Etude des branches infinies d'une courbe

Considérons comme exemple, le cas :  $f(x)$  tend vers l'infini quand  $x$  tend vers l'infini.

1. Si  $\frac{f(x)}{x}$  tend vers l'infini quand  $x$  tend vers l'infini on a une *branche parabolique de direction asymptotique*  $Oy$ .
2. Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ , on a une *branche parabolique de direction asymptotique*  $Ox$ .
3. Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \neq 0$ , la droite  $y = \alpha x$  est la *direction asymptotique* de la courbe, et on doit encore distinguer deux cas :
  - Si  $f(x) - \alpha x$  tend vers  $\infty$  quand  $x \rightarrow \infty$ , on a encore une *branche parabolique*.
  - Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$ , la courbe admet la droite d'équation  $y = \alpha x + \beta$  comme asymptote. Sa position par rapport à cette asymptote dépend du signe de l'infiniment petit  $D = f(x) - (\alpha x + \beta)$  quand  $x$  tend vers l'infini.

Pour faire l'étude dans le cas 3. il suffit d'avoir un développement limité au voisinage de l'infini de la fonction  $\frac{f(x)}{x}$ . En effet si on a :

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon \left( \frac{1}{x} \right) \quad \text{avec } a_2 \neq 0$$

On trouve alors

$$\alpha = a_0, \beta = a_1 \text{ et } D = f(x) - a_0 x - a_1 = \frac{1}{x} \left( a_2 + \varepsilon \left( \frac{1}{x} \right) \right)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Pour  $x$  grand,  $a_2 + \varepsilon(\frac{1}{x})$  a le signe de  $a_2$ , on en déduit donc la position de la courbe par rapport à l'asymptote d'équation  $y = a_0x + a_1$ .

Si  $a_2 = 0$ , il faut trouver le premier terme non nul après  $a_2$  dans le développement de  $\frac{f(x)}{x}$  et faire un raisonnement similaire.

## Etude des branches infinies d'une courbe

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe A

## Exercices

A.1	Exercices du chapitre 6 . . . . .	48
A.2	Exercices de TD . . . . .	70

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## A.1 Exercices du chapitre 6

A.1.1	Ch6-Exercice1	49
A.1.2	Ch6-Exercice2	50
A.1.3	Ch6-Exercice3	51
A.1.4	Ch6-Exercice4	52
A.1.5	Ch6-Exercice5	53
A.1.6	Ch6-Exercice6	54
A.1.7	Ch6-Exercice7	55
A.1.8	Ch6-Exercice8	56
A.1.9	Ch6-Exercice9	57
A.1.10	Ch6-Exercice10	58
A.1.11	Ch6-Exercice11	59
A.1.12	Ch6-Exercice12	60
A.1.13	Ch6-Exercice13	61
A.1.14	Ch6-Exercice14	62
A.1.15	Ch6-Exercice15	63
A.1.16	Ch6-Exercice16	64
A.1.17	Ch6-Exercice17	65
A.1.18	Ch6-Exercice18	66
A.1.19	Ch6-Exercice19	67
A.1.20	Ch6-Exercice20	68

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.1** Ch6-Exercice1

Montrer par récurrence que

$$\forall k = 1, 2, \dots, n, \quad \frac{d^k}{dx^k} x^n = n(n-1) \cdots (n+1-k)x^{n-k},$$

En déduire que

$$\frac{d^n}{dx^n} x^n = n!$$

puis que

$$\frac{d^k}{dx^k} x^n = 0, \quad \forall k > n.$$

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.2 Ch6-Exercice2

Montrer que la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 0 n'est autre que la formule des accroissements finis.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.3 Ch6-Exercice3

Montrer que si l'on applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$  à un polynôme de degré  $n$ , on obtient la formule de Taylor pour les polynômes.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.4 Ch6-Exercice4

Montrer que la formule de Mac-Laurin est une application directe de la formule de Taylor-Lagrange.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.5 Ch6-Exercice5

Donner une approximation de  $\ln 2$  en utilisant le développement de Taylor de  $f(x) = \ln(1+x)$  à l'ordre 2, 3, ..., 6 et comparer à sa valeur exacte.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.6 Ch6-Exercice6

Donner, à l'ordre 7, le développement de  $\sin x$  et  $\cos x$  au point  $x = 0$ .

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.7 Ch6-Exercice7

Donner les développements de Mac-Laurin des fonctions  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  
 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.8 Ch6-Exercice8

1. Donner le développement de Taylor-Young de  $\sin x$  au voisinage de  $\frac{\pi}{4}$  à l'ordre 4.
2. Donner le développement de Taylor-Young de  $\sin x$  au voisinage de 0 à l'ordre 4. En déduire la limite de  $\frac{\sin x - x}{x^3}$  quand  $x$  tend vers 0.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.9 Ch6-Exercice9

Montrer que les infiniment petits (au voisinage de 0)  $\sin kx$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq 0$ ) et  $x$  sont du même ordre et que les infiniment petits (au voisinage de 0)  $x^2$  et  $\sin x$  ne sont pas du même ordre.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.10 Ch6-Exercice10

On suppose que  $f$  est un infiniment petit d'ordre  $p$  au voisinage de  $a$  et on pose  $g(x) = f(a + x)$ . Montrer que  $g$  est un infiniment petit d'ordre  $p$  au voisinage de 0.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.11 Ch6-Exercice11

Soit la fonction  $f(x) = x \sin(1/x)$ , montrer que c'est un infiniment petit au voisinage de  $x = 0$ , mais que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^p}$  n'existe pas pour  $p \geq 1$ . En déduire que l'infiniment petit  $f$  n'a pas d'ordre entier non nul.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.12 Ch6-Exercice12

Montrer que si  $f$  et  $g$  sont deux infiniment petits au voisinage de 0, on a

$$\text{Ordre}(f(x)g(x)) = \text{Ordre}(f(x)) + \text{Ordre}(g(x))$$

et en déduire que si  $f$  est d'ordre strictement supérieur à  $g$ , alors

$$\text{Ordre}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \text{Ordre}(f(x)) - \text{Ordre}(g(x)).$$

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.13 Ch6-Exercice13

Soient  $f(x) = x$  et  $g(x) = -\sin x$ . Quel est l'ordre des infiniment petits  $f$ ,  $g$  et  $f + g$ ? Conclusion?

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.14 Ch6-Exercice14

Montrer que si  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$ , elle y admet un développement à n'importe quel ordre  $m < n$ .

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.15 Ch6-Exercice15

Donner des exemples de développement limité dans lequel la partie régulière du développement est un polynôme de degré strictement inférieur à l'ordre du développement.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.16 Ch6-Exercice16

Donner le développement limité à l'ordre 3 de  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.17 Ch6-Exercice17

Donner, à l'ordre 2, le développement limité de  $e^x$  et  $\sin x$ . En déduire le développement limité à l'ordre 2 de  $e^x \sin x$ . Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Taylor.

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.1.18 Ch6-Exercice18

Donner le développement limité à l'ordre 7 de  $\sin x$  et  $\cos x$ . Effectuer la division suivant les puissances croissantes des deux parties principales pour montrer que le développement limité à l'ordre 7 de  $\tan x$  est :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{15} + 17\frac{x^7}{315} + x^7 \varepsilon(x).$$

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.19 Ch6-Exercice19

Donner le développement limité à l'ordre 5 de  $\frac{1}{1+x^2}$  (en utilisant celui de  $(1+x)^{-1}$ ).

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.20 Ch6-Exercice20

Donner le développement limité de  $(1 - x^2)^{-1/2}$  à l'ordre 5. En déduire (par intégration) le développement limité de  $\text{Arcsin } x$  à l'ordre 6. Comment calculeriez vous celui de  $\text{Arctan } x$ ?

[Retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## A.2 Exercices de TD

A.2.1	TD6-Exercice1	71
A.2.2	TD6-Exercice2	72
A.2.3	TD6-Exercice3	74
A.2.4	TD6-Exercice4	75
A.2.5	TD6-Exercice5	76
A.2.6	TD6-Exercice6	77
A.2.7	TD6-Exercice7	78
A.2.8	TD6-Exercice8	79
A.2.9	TD6-Exercice9	81
A.2.10	TD6-Exercice10	82
A.2.11	TD6-Exercice11	83
A.2.12	TD6-Exercice12	84
A.2.13	TD6-Exercice13	85
A.2.14	TD6-Exercice14	86
A.2.15	TD6-Exercice15	88
A.2.16	TD6-Exercice16	89
A.2.17	TD6-Exercice17	90
A.2.18	TD6-Exercice18	91
A.2.19	TD6-Exercice19	92
A.2.20	TD6-Exercice20	93
A.2.21	TD6-Exercice21	95
A.2.22	TD6-Exercice22	96

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



<a href="#">A.2.23 TD6-Exercice23</a>	.....	97
<a href="#">A.2.24 TD6-Exercice24</a>	.....	98
<a href="#">A.2.25 TD6-Exercice25</a>	.....	99
<a href="#">A.2.26 TD6-Exercice26</a>	.....	100

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.1** TD6-Exercice1

1. Etant donnés les réels  $a_0, a_1, a_2, a_3$ , déterminer le polynôme  $p$  de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant  $p^{(i)}(0) = a_i$ .
2. Etant donnés le réel  $x_0$  et les réels  $a_0, a_1, a_2, a_3$ , déterminer le polynôme  $p$  de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant  $p^{(i)}(x_0) = a_i$ .
3. On définit  $p(x) = x^3 - 2x$ , on veut écrire  $p$  sous la forme  $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - 1) + \alpha_2(x - 1)^2 + \alpha_3(x - 1)^3$ . Déterminer  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Question 1 [Aide 1](#)

Question 2 [Aide 1](#)

Question 3 [Aide 1](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.2 TD6-Exercice2

On appelle cosinus et sinus hyperbolique les fonctions définies de la façon suivante :

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- Calculer le développement de Taylor Lagrange à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes ( $\alpha$  est un paramètre) :  
*i)*  $\alpha - \cos x$ , *ii)*  $\alpha - e^x$ , *iii)*  $\sin x - \alpha x$ , *iv)*  $\ln(2 + x)$ ,  
*v)*  $shx$ , *vi)*  $chx - 1$ , *vii)*  $(1 + x)^4 - \alpha x - 1$
- Les expressions précédentes sont-elles des infiniment petits au voisinage de 0? Si oui de quel ordre? Préciser leur partie principale. Discuter en fonction du paramètre  $\alpha$ .

Réponses :

- i)* pour  $\alpha = 1$ , partie principale  $\frac{x^2}{2}$ , *ii)* pour  $\alpha = 1$ , partie principale  $-x$ ,  
*iii)* pour  $\alpha \neq 1$ , partie principale  $(1 - \alpha)x$ , pour  $\alpha = 1$ , partie principale  $\frac{-x^3}{6}$ ,  
*v)* partie principale  $x$ , *vi)* partie principale  $\frac{x^2}{2}$   
*vii)* pour  $\alpha \neq 4$ , partie principale  $(4 - \alpha)x$ , pour  $\alpha = 4$ , partie principale  $6x^2$
- Calculer le développement de Taylor Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de  $x_0 \neq 0$  des fonctions suivantes ( $\alpha$  est un paramètre) :

$$i) \alpha - \cos x, \quad ii) \alpha - e^x, \quad iii) \sin x - x, \quad iv) (1 + x)^4 - 1$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

4. Les expressions précédentes sont-elles des infiniment petits au voisinage de  $x_0$ ? Si oui de quel ordre? Préciser leur partie principale. Discuter en fonction du paramètre  $\alpha$ .

Réponses : *i*) pour  $\alpha = \cos x_0$ ,

— Pour  $\sin x_0 \neq 0$ , partie principale  $(x - x_0) \sin x_0$ ,

— Pour  $\sin x_0 = 0$ , partie principale  $\frac{(x - x_0)^2}{2} \cos x_0$ ,

*ii*) pour  $\alpha = e^{x_0}$ , partie principale  $-(x - x_0)e^{x_0}$

*iv*) pour  $x_0 = -2$ , partie principale  $-4(x + 2)$

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)

Question 3 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 4 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

## Exercice A.2.2

TD6-Exercice2

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.2.3 TD6-Exercice3

Donner un ordre suffisant qui permette d'approcher sinus de 61 degrés à l'aide d'un développement de Taylor faisant intervenir cosinus de 60 degrés et sinus de 60 degrés en commettant une erreur inférieure à  $10^{-3}$  en valeur absolue.

[Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#) [Aide 6](#) [Aide 7](#) [Aide 8](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.4 TD6-Exercice4

1. Calculer un développement de Taylor-Young à l'ordre 4 au voisinage de 0 de chacune des fonctions :  $\cos x$ ,  $(1 - \cos x)^2$ ,  $\cos^2 x$ . (Vérifier vos résultats en développant  $(1 - \cos x)^2$ .)
2. Calculer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de  $\frac{\pi}{4}$  de la fonction  $\cos x$ 
  - (a) en utilisant la formule de Taylor-Young qui permet d'exprimer  $\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right)$ ,
  - (b) en développant  $\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right)$  et en utilisant les développements connus de  $\cos h$  et  $\sin h$  au voisinage de 0.

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 2a [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 2b [Aide 1](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.5 TD6-Exercice5

écrire les développements de Taylor-Young au voisinage de 0 des fonctions suivantes :  $e^x \sqrt{1+x^2}$   
à l'ordre 2,  $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$  à l'ordre 2.

[Aide 1](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.6 TD6-Exercice6

On définit les fonctions hyperboliques suivantes

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

alors on a (le vérifier)

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x.$$

1. Donner l'ordre des infimums petits (au voisinage de 0) et donner la partie principale des fonctions :  $\sin x - x$ ,  $\sinh x$ ,  $1 - \cosh x$ ,  $\frac{x}{1+x}$ ,  $\sqrt{1+x} - 1$ .
2. écrire les développements de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de  $a$  des fonctions :  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\sinh x$ ,  $\cosh x$ ,  $\frac{1}{1-x}$  ( $a \neq 1$ ),  $\sqrt{x}$  ( $a > 0$ ).
3. écrire les développements de Taylor-Young au voisinage de  $a$  des fonctions :  $\ln(1+x)$  à l'ordre 2 ( $a \neq -1$ ),  $\arctan x$  à l'ordre 2.

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 3 [Aide 1](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.2.7 TD6-Exercice7

Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 des fonctions

$$e^x \ln(1+x), \sqrt{1+x} \cos x$$

Réponse :

$$e^x \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \epsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} \cos x = 1 + \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{8} - \frac{3x^3}{16} + x^3 \epsilon(x)$$

[Aide 1](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.8 TD6-Exercice8

1. Utiliser la division suivant les puissances croissantes pour déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de  $\frac{\ln(1+x)}{1+\sin x}$ .
2. Utiliser le développement limité de  $\frac{1}{1+x}$  (au voisinage de quel point?) pour obtenir le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de  $\frac{1}{1+\sin x}$ .
3. Retrouver le résultat de la 1ère question en effectuant un produit de développements limités.
4. Calculer le développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

(a)

$$\frac{e^x}{\cos x}, \quad n = 3.$$

(b)

$$\frac{\sin x}{x}, \quad n = 4.$$

(c)

$$\frac{x}{\sin x}, \quad n = 4.$$

Réponses :

$$\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + x^3 \epsilon(x)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4 \epsilon(x)$$
$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + x^4 \epsilon(x)$$

- Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)  
Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)  
Question 3 [Aide 1](#)  
Question 4a [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)  
Question 4b [Aide 1](#)  
Question 4c [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)

## Exercice A.2.8

TD6-Exercice8

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.2.9 TD6-Exercice9

1. écrire les développements limités à l'ordre  $n$  au voisinage de 0 des fonctions :  $\frac{1}{1-x}$ ,  $\frac{1}{1+x^2}$ ,  
 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
2. Effectuer les développements limités au voisinage de 0 des fonctions suivantes :  $\frac{1}{\cos x}$  à l'ordre 4,  $\frac{e^x-1}{x}$  à l'ordre 2.

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.10 TD6-Exercice10

écrire les développements limités au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1.  $\tan x$  à l'ordre 5,  $\frac{e^x}{\cos x}$  à l'ordre 2,  $\frac{1}{1+e^{-x}}$  à l'ordre 3,  $\frac{\sin x}{x}$  à l'ordre 4,  $\frac{x}{\sin x}$  à l'ordre 4,  $\frac{x}{e^x-1}$  à l'ordre 2.
2.  $\ln(1+\sin x)$  à l'ordre 3,  $\ln(1+\cos x)$  à l'ordre 3,  $\sqrt{\cos x}$  à l'ordre 4,  $\sqrt{1+\cos x}$  à l'ordre 2,  $e^{\sqrt{1+x}}$  à l'ordre 2,  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  à l'ordre 2.

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.11 TD6-Exercice11

Calculer le développement limité de la fonction  $f$  au voisinage de  $a$  à l'ordre 2 dans chacun des cas :  $(f(x) = \tan x, a = \frac{\pi}{4})$ ,  $(f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}, a = 1)$ ,  $(f(x) = \sqrt{\tan x}, a = \frac{\pi}{4})$ ,  $(f(x) = \sin(\pi \cos x), a = \frac{\pi}{3})$ ,  $(f(x) = e^{\sin x}, a = \frac{\pi}{6})$ ,  $(f(x) = \ln(\sin x), a = \frac{\pi}{3})$ .

[Aide 1](#) [Aide 2](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.12 TD6-Exercice12

Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, de la fonction

$$f(x) = 3 + \int_0^x e^{t^2} dt.$$

Réponse :

$$f(x) = 3 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + x^6 \epsilon(x)$$

[Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.13 TD6-Exercice13

On définit  $f(x) = \tan x$ .

1. Montrer que  $f'$  admet un développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0.
2. Montrer que parmi les 7 coefficients à déterminer, avant tout calcul, on peut affirmer que certains d'entre eux sont nuls. Combien reste-t-il de coefficients inconnus à déterminer?
3. Donner l'expression du développement limité à l'ordre 7 de  $f(x)$  au voisinage de 0 à l'aide de ces coefficients.
4. On sait que  $f'(x) = 1 + f^2(x)$ , utiliser cette relation pour en déduire le développement limité à l'ordre 7 de  $f(x)$  au voisinage de 0

Réponse :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + x^7 \varepsilon(x)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.2.14 TD6-Exercice14

- (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de  $\ln(1 + \frac{x}{2})$  au voisinage de 0.  
(b) En déduire le développement limité à l'ordre 3 de  $\ln(2 + x)$  au voisinage de 0.  
(c) Comparer avec ce qui a été trouvé dans l'exercice [A.2.2](#).
2. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

(a)

$$\ln(1 + \cos x)$$

(b)

$$\ln(1 + \sin x)$$

Réponse :

$$\ln(1 + \cos x) = \ln 2 - \frac{x^2}{4} + x^3 \epsilon(x)$$

$$\ln(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \epsilon(x)$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Question 1a [Aide 1](#)

Question 1b [Aide 1](#)

Question 1c [Aide 1](#)

Question 2a [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)

Question 2b [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)

## Exercice A.2.14

TD6-Exercice14

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.15** TD6-Exercice15

Calculer les développements limités à l'ordre  $n$  au voisinage de  $a$  des fonctions  $f(x)$  dans les cas suivants :

$$(f(x) = \sqrt{1 + \cos x}, a = 0, n = 2), (f(x) = \sqrt{\cos x}, a = 0, n = 4),$$

$$(f(x) = \sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}}, a = 0, n = 2),$$

$$(f(x) = \arctan shx, a = 0, n = 3), (f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{2 \cos x + 1}}, a = \frac{\pi}{4}, n = 2).$$

Réponses :

$$\sqrt{\cos x} = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + x^4 \epsilon(x)$$

$$\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \left( 1 - \frac{x^2}{8} \right) + x^2 \epsilon(x)$$

$$\sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}} = 1 - \frac{x}{4} + \frac{13x^2}{96} + x^2 \epsilon(x)$$

$$\arctan shx = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \epsilon(x)$$

$$\frac{\tan x}{\sqrt{2 \cos x + 1}} = \frac{1}{2} + \frac{5h}{4} + \frac{7h^2}{4} + h^2 \epsilon(h), \text{ avec } h = x - \frac{\pi}{4}.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.16 TD6-Exercice16

On considère la fonction  $f(x) = \ln |\cos x|$ .

1. Donner le domaine de définition de  $f$ , réduire l'intervalle d'étude.
2. Donner le tableau de variation de  $f$  et tracer sa courbe représentative ( $C$ ).
3. Quelle est, au voisinage de 0, la position de ( $C$ ) par rapport à la parabole d'équation  $y = -\frac{x^2}{2}$  ?

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 2 [Aide 1](#)

Question 3 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.17 TD6-Exercice17

1. Calculer un développement limité de  $e^{\sin x}$  au voisinage de 0 à l'ordre 4.
2. Calculer un développement limité de  $\arctan(\sqrt{3}(\cos x + \sin x))$  au voisinage de 0 à l'ordre 2.
3. Calculer un développement limité de  $\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$  au voisinage de 0 à l'ordre 3.

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 3 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.2.18 TD6-Exercice18

Déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

soit, au voisinage de 0, un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible, trouver alors sa partie principale.

$$\text{Réponse : } a = -\frac{5}{12}, \quad b = \frac{1}{12}, \quad \frac{x^6}{480}$$

[Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#) [Aide 6](#) [Aide 7](#) [Aide 8](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.19 TD6-Exercice19

Déterminer les constantes  $a, b, c, d$  pour que les infiniment petits au voisinage de 0 soient d'ordre le plus élevé possible :  $\tan x + a \sin x + b \sin^2 x, \frac{1}{\sqrt{1+x}} + c \cos x + d \tan x$ . Quelles sont alors les parties principales ?

[Aide 1](#) [Aide 2](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.20** TD6-Exercice20

1. Retrouver les limites, déjà calculées dans le TD5, en utilisant les développements limités

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}, \quad iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x},$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos x - \frac{1}{2}}, \quad v) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}, \quad vi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

2. Calculer les limites suivantes :

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\ln(\tan x)}.$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x - 2 \sin x)}{x}.$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right).$$

Réponses :

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}, -2, 1.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 2a [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)  
Question 2b [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 2c [Aide 1](#) [Aide 2](#)

## Exercice A.2.20

TD6-Exercice20

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.21 TD6-Exercice21

Calculer la limite lorsque  $x \rightarrow 0$  des expressions :

$$\frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}, \quad \frac{(1 - \cos x) \arctan x}{x \sin^2 x}, \quad \frac{\sin x - x \cos x}{x(1 - \cos x)}, \quad \frac{\sin x + 2 - 2\sqrt{1+x}}{\cos x - 1}.$$

[Aide 1](#) [Aide 2](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.22 TD6-Exercice22

Calculer les limites de  $f(x)$  lorsque  $x \rightarrow a$  dans les cas suivants :

$$(f(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{x^3}, a = 0), (f(x) = \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}, a = 0),$$

$$(f(x) = \frac{e^{-x} \sin x - x + x^2}{x^4}, a = 0), (f(x) = \frac{\sin x - \ln(1+x)}{(e^x - 1) \sin x}, a = 0),$$

$$(f(x) = x \left( (1 + \frac{1}{x})^x - e \right), a = +\infty), (f(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \tan x}{1 + \cos 4x}, a = \frac{\pi}{4}).$$

[Aide 1](#) [Aide 2](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.23 TD6-Exercice23

1. Tracer au voisinage de 0 les 4 courbes d'équation  $y = x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \ln(1 + x)$ .
2. Utiliser un développement limité pour trouver l'équation de la tangente à la courbe d'équation  $y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$  au point d'abscisse 0. Préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.
3. On définit  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  si  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 1$ , montrer que la courbe d'équation  $y = f(x)$  admet une droite tangente au point d'abscisse 0 dont on donnera l'équation. Préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Question 1 [Aide 1](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 3 [Aide 1](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.24 TD6-Exercice24

Soit  $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + x + 1}$

1. Montrer que  $f(x)$  tend vers l'infini quand  $x$  tend vers  $+\infty$  puis quand  $x$  tend vers  $-\infty$  (préciser le signe).
2. Calculer la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ), soit  $a$  cette limite.
3. Calculer la limite de  $f(x) - ax$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).
4. Déterminer l'équation de l'asymptote et la position de la courbe par rapport à l'asymptote quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).
5. Montrer que l'on aurait pu obtenir tous ces résultats en effectuant un développement limité de  $\frac{f(x)}{x}$  à un ordre convenable.

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 3 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 4 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 5 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.2.25 TD6-Exercice25

1. Soit  $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ , écrire un développement limité au voisinage de l'infini à l'ordre 2 de  $\frac{f(x)}{x}$ .
2. En déduire l'équation de la droite asymptote à la courbe d'équation  $y = f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
3. Mêmes questions avec les courbes d'équation  $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $y = x \cos \frac{1}{x}$ .

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 3 [Aide 1](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exercice A.2.26 TD6-Exercice26

Etudier et tracer la courbe représentative de la fonction  $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ .

[Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#) [Aide 6](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe B

## Exemples

B.1 Exemples du chapitre 6 . . . . . 102

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## B.1 Exemples du chapitre 6

B.1.1	Approximation de $\ln(1+x)$ . . . . .	103
B.1.2	Approximation de $\sin x$ . . . . .	105
B.1.3	Application du développement de Taylor-Young de $\cos x$ . . . . .	107
B.1.4	Division suivant les puissances croissantes . . . . .	108
B.1.5	Exemple de composition de développements limités . . . . .	109
B.1.6	Calcul de limite par développements limités . . . . .	111

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

### Exemple B.1.1 Approximation de $\ln(1+x)$

L'exemple ci-dessous va montrer comment utiliser les développements pour encadrer la valeur exacte cherchée. Soit  $f(x) = \ln(1+x)$ , le développement au voisinage de 0 s'écrit :

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{h^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{h^{n+1}}{(1+\theta h)^{n+1}}, \quad (\text{B.1.1})$$

développement qui est valide pour  $h \in ]-1, +\infty[$ . Prenons par exemple  $n = 2$ , et  $h = 1$ . Il vient

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3(1+\theta)^3} \quad \text{avec } \theta \in ]0, 1[.$$

Passons au calcul numérique. Connaissant  $\ln 2 = 0.693\dots$ , on trouve facilement  $\theta = 0.199\dots$  Mais il est plus intéressant de procéder dans le sens inverse. Sans connaître la valeur exacte de  $\theta$ , mais seulement les inégalités  $0 < \theta < 1$ , on déduit aisément de (B.1.1) un encadrement pour  $\ln(1+h)$ . Par exemple, pour  $h = 1$ , nous obtenons, avec  $n = 2$  :

$$0,541666\dots = \frac{13}{24} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} < \ln 2 < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \\ = 0,833333\dots$$

ou, avec  $n = 3$  :

$$0,583333\dots = \frac{7}{12} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} < \ln 2 < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} = \frac{157}{192} \\ = 0,817708333\dots$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Sur cet exemple, nous voyons que la qualité de l'approximation dépend du reste, donc du comportement de la dérivée d'ordre  $n + 1$ . Dans le cas de la fonction *sinus* (voir l'exemple suivant), cette dérivée est bornée par 1 quel que soit  $n$ , tandis que dans le cas du logarithme, cette dérivée est seulement majorée (en valeur absolue) par  $n!$ .

[Retour au cours](#)

### Exemple B.1.1

Approximation  
de  $\ln(1 + x)$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Exemple B.1.2 Approximation de $\sin x$

La partie régulière du développement de  $\sin x$  à l'ordre  $2p+2$ , est un polynôme de degré  $2p+1$  qui s'écrit :

$$P_{2p+1}(h) \stackrel{\text{Déf}}{=} h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^7}{7!} + \cdots + (-1)^p \frac{h^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Prenons  $h = 0.1$  radian ( $\approx 5,73$  degré), nous avons :

$$\begin{aligned} \sin h &= 0.09983341665 \\ P_1(h) &= 0.1 \\ P_3(h) &= 0.09983333333 \\ P_5(h) &= 0.09983341666, \end{aligned}$$

Ce qui montre la qualité de l'approximation de  $\sin h$  par  $P_5(h)$ .

Nous pouvons légitimement nous demander si cette approximation n'est intéressante que *localement*, c'est-à-dire pour  $h$  petit. Nous pouvons voir qu'il n'en est rien. Prenons  $h = \frac{\pi}{2}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \sin h &= 1 \\ P_1(h) &= 1.570832229 \\ P_3(h) &= 0.924832229 \\ P_5(h) &= 1.004524856 \\ P_7(h) &= 0.999843101 \\ P_9(h) &= 1.000003543... \end{aligned}$$

ce qui montre là encore la convergence rapide de cette suite. Attention cependant, les termes de ce polynôme sont de signes alternés. Si l'on prend des valeurs suffisamment grandes de  $h$ , les valeurs calculées ne représenteront plus rien du tout

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

[Retour au cours](#)

**Exemple B.1.2**  
Approximation  
de  $\sin x$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exemple B.1.3 Application du développement de Taylor-Young de $\cos x$

Le développement de Taylor-Young de la fonction  $\cos x$  au voisinage de 0 est

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x).$$

Définissons la fonction

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \text{avec} \quad D(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Pour  $h \neq 0$ ,  $h$  petit nous pouvons écrire

$$f(h) = \frac{1 - (1 - \frac{h^2}{2} + h^3 \varepsilon(h))}{h^2} = \frac{1}{2} + h \varepsilon(h). \quad (\text{B.1.2})$$

Ainsi  $f$  admet une limite ( $= \frac{1}{2}$ ) en  $x = 0$  et nous pouvons prolonger  $f$  par continuité en 0 et définir

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0, \\ \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

La formule (B.1.2) permet de montrer que la fonction  $\tilde{f}$  est même dérivable sur  $\mathbb{R}$ . En effet  $f$  est dérivable sur son domaine de définition  $D(f)$  et il reste à étudier la dérivabilité de  $\tilde{f}$  en 0, or d'après (B.1.2) on a

$$\tilde{f}(h) - \tilde{f}(0) = h \varepsilon(h),$$

ce qui montre que  $\tilde{f}'(0) = 0$  est bien défini.

[Retour au cours](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exemple B.1.4 Division suivant les puissances croissantes

Soient les polynômes  $A(x) = 2 - x + x^2 - 3x^3$ ,  $B(x) = 1 - x^2$  rangés suivant les puissances croissantes. Effectuons la division de A par B de façon à pouvoir mettre  $x^4$  en facteur dans le reste.

$A(x) :$	2	-x	$+x^2$	$-3x^3$	$\frac{1 - x^2}{2 - x + 3x^2 - 4x^3}$
$-B(x)Q_1(x) :$	-2		$2x^2$		
$R_1(x) :$		-x	$+3x^2$	$-3x^3$	
$-B(x)Q_2(x) :$		+x		$-x^3$	
$R_2(x) :$			$3x^2$	$-4x^3$	
$-B(x)Q_3(x) :$			$-3x^2$	$+3x^4$	
$R_3(x) :$			$-4x^3$	$+3x^4$	
$-B(x)Q_4(x) :$			$+4x^3$	$-4x^5$	
$R_4(x) :$			$3x^4$	$-4x^5$	

Nous avons ainsi obtenu :

$$2 - x + x^2 - 3x^3 = (1 - x^2)(2 - x + 3x^3 - 4x^3) + x^4(3 - 4x).$$

[Retour au cours](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exemple B.1.5 Exemple de composition de développements limités

Nous désirons calculer à l'ordre 5 le développement limité de  $\varphi(x) = e^{\sin x}$ , au voisinage de 0. Nous avons :

$$a = \alpha_0 = 0, \quad f(x) = \sin x, \quad g(x) = e^x$$

et

$$R(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$Q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Calculons  $Q \circ R$ . Nous obtenons :

$$Q(R(x)) = 1 + \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right] + \frac{1}{2!} \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right]^2 + \frac{1}{3!} \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right]^3$$

$$+ \frac{1}{4!} \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right]^4 + \frac{1}{5!} \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right]^5$$

et S s'obtient en ne gardant que les termes de degré  $\leq 5$  dans le polynôme précédent, soit

$$S(x) = 1 + \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) + \frac{1}{2!} \left( x^2 - \frac{2x^4}{3!} \right) + \frac{1}{3!} \left( x^3 - \frac{3x^5}{3!} \right) + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5$$

d'où le développement cherché

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + x^5 \varepsilon(x). \quad (\text{B.1.3})$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

à titre indicatif prenons  $x = 0.1 \text{ rad}$  ( $\approx 5.73 \text{ deg}$ ), nous obtenons :

$$e^{\sin x} = 1.104986830 \dots$$

et la partie régulière de (B.1.3) vaut

$$S(0.1) = 1.104986833 \dots$$

ce qui montre que le terme complémentaire est de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-9}$ .

[Retour au cours](#)

**Exemple B.1.5**  
Exemple de  
composition de  
développements  
limités

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exemple B.1.6 Calcul de limite par développements limités

Calculons la limite quand  $x \rightarrow +\infty$  de

$$f(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, \quad a \in \mathbb{R}_*$$

Nous obtenons ici une forme indéterminée de la forme  $1^\infty$ . En prenant le logarithme, nous obtenons :

$$\ln f(x) = x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right),$$

ce qui, en posant  $h = \frac{1}{x}$ , se ramène à l'étude au voisinage de 0 de la forme indéterminée

$$g(h) = \frac{\ln(1 + ah)}{h}$$

qui est de la forme  $\frac{0}{0}$ . Nous allons donc utiliser le développement limité de  $\ln(1 + ah)$  qui est

$$\ln(1 + ah) = ah + h\varepsilon(h)$$

et donc

$$g(h) = a + \varepsilon(h)$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = a.$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Nous avons ainsi établi que :

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \rightarrow e^a \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty.$$

[Retour au cours](#)

### Exemple B.1.6

Calcul de limite  
par  
développements  
limités

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe C

## Documents

C.1 Documents du chapitre 6 . . . . . 114

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## C.1 Documents du chapitre 6

C.1.1	Formule de Taylor-Lagrange - demonstration . . . . .	115
C.1.2	Développements limités des fonctions paires . . . . .	118

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Document C.1.1 Formule de Taylor-Lagrange - demonstration

**Théorème C.1.1.** Soit  $f$  une fonction  $n+1$  fois dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$ . Alors quel que soit  $h$  tel que  $a + h \in I$ , il existe un  $\theta \in ]0, 1[$ , tel que l'on a la relation :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h). \quad (\text{C.1.1})$$

*Démonstration* - Soient donc  $a$  et  $h$  fixés (avec  $a + h \in I$ ) et définissons tout d'abord le nombre  $C$  par l'égalité

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + C \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (\text{C.1.2})$$

puis introduisons la fonction  $\varphi$  suivante

$$\varphi(x) = f(a+x) - f(a) - \frac{x}{1!} f'(a) - \frac{x^2}{2!} f''(a) - \dots - \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a) - C \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (\text{C.1.3})$$

Notons que  $\varphi$  est une fonction qui admet des dérivées jusqu'à l'ordre  $n+1$  sur  $I$ , puisque  $f$  est  $(n+1)$  fois dérivable et que les autres termes sont des monômes en la variable  $x$ .

— (i) Par définition  $\varphi(0) = 0$  et, d'après le choix de  $C$ , nous avons également  $\varphi(h) = 0$ . Nous pouvons donc appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle  $[0, h]$  (en supposant  $h > 0$ , sinon on se place dans l'intervalle  $[h, 0]$ ), et il existe donc un point  $\xi_1 \in ]0, h[$  tel que

$$\varphi'(\xi_1) = 0, \quad (\text{C.1.4})$$

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

avec

$$\varphi'(x) = f'(a+x) - f'(a) - xf''(a) - \frac{x^2}{2!}f'''(a) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a) - C\frac{x^n}{n!}. \quad (\text{C.1.5})$$

— (ii) Nous avons donc (C.1.4) et, d'après la relation (C.1.5)

$$\varphi'(0) = 0.$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème de Rolle à  $\varphi'$  sur l'intervalle  $[0, \xi_1]$ . Il existe donc  $\xi_2 \in ]0, \xi_1[$  tel que

$$\varphi''(\xi_2) = 0, \quad (\text{C.1.6})$$

avec

$$\varphi''(x) = f''(a+x) - f''(a) - xf'''(a) - \dots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(a) - C\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

— (iii) Nous nous retrouvons ainsi dans une situation analogue à la précédente puisque l'on a (C.1.6) et clairement

$$\varphi''(0) = 0.$$

De proche en proche nous arrivons à la situation suivante : il existe

$$\xi_n \in ]0, \xi_{n-1}[ < ]0, \xi_{n-2}[ < \dots < ]0, h[$$

tel que

$$\varphi^{(n)}(\xi_n) = 0 \quad (\text{C.1.7})$$

avec

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(a+x) - f^{(n)}(a) - Cx. \quad (\text{C.1.8})$$

## Document

### C.1.1

Formule de  
Taylor-Lagrange  
- démonstration

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

— (iv) Il résulte de (C.1.7) et (C.1.8) que  $\varphi^{(n)}$  est dérivable pour  $x \in [0, h]$  et vérifie :

$$\varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(\xi_n) = 0,$$

de sorte que le théorème de Rolle s'applique à  $\varphi^{(n)}$  : il existe  $c \in ]0, \xi_n[ \subset ]0, h[$  tel que

$$\varphi^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(a+c) - C = 0,$$

ce qui montre que

$$C = f^{(n+1)}(a+c) \quad \text{avec} \quad c \in ]0, h[. \quad (\text{C.1.9})$$

ce qui s'écrit aussi :

$$C = f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad \text{avec} \quad \theta \in ]0, 1[. \quad (\text{C.1.10})$$

Le théorème est alors démontré puisqu'avec  $C$  donné par (C.1.10), les formules (C.1.1) et (C.1.2) sont identiques.

[Retour au cours](#)

## Document

### C.1.1

Formule de  
Taylor-Lagrange  
- démonstration

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Document C.1.2 Développements limités des fonctions paires

**Proposition C.1.1.** *La partie régulière du développement limité, au voisinage de 0, d'une fonction paire (resp. impaire) ne contient que des termes pairs (resp. impairs).*

*Démonstration* - Soit  $f$  une fonction paire admettant le développement limité à l'ordre  $(2n + 1)$  :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{2n} x^{2n} + \alpha_{2n+1} x^{2n+1} + x^{2n+1} \varepsilon(x),$$

alors en changeant  $x$  en  $(-x)$ , nous obtenons :

$$f(-x) = \alpha_0 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{2n} x^{2n} - \alpha_{2n+1} x^{2n+1} - x^{2n+1} \varepsilon(-x),$$

Comme  $f(x) = f(-x)$ , en soustrayant les deux développements nous obtenons :

$$0 = 2(\alpha_1 x^1 + \alpha_3 x^3 + \cdots + \alpha_{2n+1} x^{2n+1}) + x^{2n+1}(\varepsilon(x) + \varepsilon(-x)).$$

Or la fonction  $g \equiv 0$ , admet comme unique développement le développement identiquement nul, de sorte que :

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = -\varepsilon(-x)$$

(ce qui implique que  $x^{2n+1} \varepsilon(x)$  est une fonction paire, ce qui est cohérent). Le cas où  $f$  est impaire se traiterait de manière analogue.

[Retour au cours](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

## B

Branches infinies ..... **45**

## D

Développement de Taylor de la fonction puissance ..... **13**

Développement de Taylor-Young ..... **15**

Développement limité - calcul de limites .... **41**

Développement limité - composition ..... **36**

Développement limité - définition ..... **25**

Développement limité - intégration ..... **38**

Développement limité - quotient ..... **33**

Développement limité - remarques ..... **27**

Développement limité - somme, produit .... **31**

Développement limité - unicité ..... **29**

Développements de Taylor de l'exponentielle et du logarithme ..... **9**

Développements de Taylor des fonctions trigonométriques ..... **11**

## E

Equivalents ..... **20**

Etude locale d'une courbe ..... **43**

## F

Formule de Taylor - polynômes ..... **4**

Formule de Taylor-Lagrange ..... **6**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)





Infiniment petit - définition.....	<b>18</b>
Infiniment petit - ordre .....	<b>22</b>

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



## Solution de l'exercice A.1.1

La récurrence se fait sur  $k$ .

— Pour  $k = 1$ , on a  $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ .

— Supposant que la relation est vraie pour  $k$ , on a alors

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx}(n(n-1)\cdots(n+1-k)x^{n-k}) = n(n-1)\cdots(n-k)x^{n-k-1}.$$

Les deux autres résultats s'en déduisent immédiatement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.2

Si l'on fait  $n = 0$  dans la formule de Taylor-Lagrange, on obtient

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$$

où  $0 < \theta < 1$ . On retrouve la formule des accroissements finis avec  $b = a+h$  et  $c = a+\theta h$  est bien compris entre  $a$  et  $b$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.3

En effet, si  $P$  est un polynôme de degré  $n$ , alors  $P^{(n+1)}(x) = 0$  et donc le reste dans la formule de Taylor-Lagrange est nul. On retrouve ainsi la formule de Taylor pour les polynômes.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.4

Si on pose  $a = 0$  et  $h = x$  dans la formule de Taylor-Lagrange, on obtient la formule de Mac-Laurin.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.5

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7(1+\theta x)^7}$$

Les approximations successives donnent :

$$\ln 2 = 1 - 0.5 + \frac{1}{3(1+\theta)^3} = 0.5 + \frac{1}{3(1+\theta)^3}$$

$$\ln 2 = 1 - 0.5 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4(1+\theta)^4} = 0.833 - \frac{1}{4(1+\theta)^4}$$

$$\ln 2 = 0.583 + \frac{1}{5(1+\theta)^5}$$

$$\ln 2 = 0.749 - \frac{1}{6(1+\theta)^6}$$

$$\ln 2 = 0.606 - \frac{1}{7(1+\theta)^7}$$

et la valeur exacte est

$$\ln 2 = 0.693\dots$$

On voit que les restes ne sont pas négligeables et qu'il faut quelques itérations supplémentaires pour avoir la deuxième décimale exacte ... puisque le terme que l'on rajoute est en  $\frac{1}{n}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.6

On obtient

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \sin(\theta x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \cos(\theta x)$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.7

Calculons les dérivées successives de  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \dots, \quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}},$$

d'où le développement de Mac-Laurin à l'ordre  $n$  :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1} \frac{1}{(1-x)^{n+2}}.$$

Les dérivées de  $\sinh x$  et  $\cosh x$  se calculent aisément, et on obtient à l'ordre  $2p$  :

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \cosh(\theta x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \sinh(\theta x)$$

Les développements à l'ordre  $2p+1$  sont aussi faciles à écrire.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.8

1. On a

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\frac{\pi}{4} + x \cos\frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{2} \sin\frac{\pi}{4} - \frac{x^3}{3!} \cos\frac{\pi}{4} + \frac{x^4}{4!} \sin\frac{\pi}{4} + x^4 \varepsilon(x)$$

et en remplaçant par les valeurs numériques

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) + x^4 \varepsilon(x).$$

2. Le développement de Taylor-Young de  $\sin x$  au voisinage de 0 est :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon(x).$$

Alors

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + x \varepsilon(x)$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.9

Les fonctions  $\sin kx$ ,  $x$  et  $x^2$  tendent vers 0 quand  $x \rightarrow 0$ , ce sont donc des infiniment petits au voisinage de 0. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} k \frac{\sin kx}{kx} = k$$

les infiniment petits  $\sin kx$  et  $x$  sont du même ordre. Par contre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\sin x}{x} = \infty$$

ce qui montre que  $\sin x$  et  $x^2$  ne sont pas des infiniment petits du même ordre.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.10

$$f(x) = \alpha(x - a)^p(1 + \varepsilon(x - a))$$

d'où

$$g(x)(= f(a + x)) = \alpha x^p(1 + \varepsilon(x))$$

et donc  $g$  est un infiniment petit d'ordre  $p$  au voisinage de 0.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.11

Il est clair que

$$|f(x)| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

aussi la fonction  $f$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0. Par contre

$$\frac{f(x)}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \sin \frac{1}{x}$$

et puisque  $p - 1 \geq 0$ , le terme  $\frac{1}{x^{p-1}}$  est soit égal à 1, soit tend vers l'infini et le terme  $\sin \frac{1}{x}$  n'a pas de limite quand  $x$  tend vers 0. D'où l'infiniment petit  $f$  n'a pas d'ordre.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.12

Soient  $m$  et  $n$  les ordres respectifs des infiniment petits  $f$  et  $g$  au voisinage de 0 :

$$f(x) = \alpha x^m + x^m \varepsilon_1(x), \quad g(x) = \beta x^n + x^n \varepsilon_2(x).$$

En faisant le produit, il vient :

$$f(x)g(x) = \alpha\beta x^{m+n} + x^{m+n}(\beta\varepsilon_1(x) + \alpha\varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x))$$

et la fonction

$$\varepsilon(x) = \beta\varepsilon_1(x) + \alpha\varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$$

tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0. Pour le quotient, il suffit d'écrire

$$f(x) = g(x) \frac{f(x)}{g(x)}$$

et d'appliquer le résultat précédent.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.13

L'ordre des infiniment petits  $x$  et  $\sin x$  est évidemment 1. Par contre

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon(x)\right)$$

et donc  $f + g$  est d'ordre 3. Il n'y a donc pas de résultat général sur l'ordre d'une somme de deux infiniment petits lorsqu'ils sont du même ordre.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.14

Soit

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_m h^m + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h)$$

alors

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_m h^m + h^m (\alpha_{m+1} h + \cdots + \alpha_n h^{n-m} + h^{n-m} \varepsilon(h))$$

et la fonction  $\alpha_{m+1} h + \cdots + \alpha_n h^{n-m} + h^{n-m} \varepsilon(h)$  tend évidemment vers 0 quand  $h$  tend vers 0.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.15

Un exemple trivial est

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4 \varepsilon(x)$$

dans lequel l'ordre du développement est 4 et le polynôme est de degré 3.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.16

La fonction  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  étant paire, il suffit de ne calculer que les termes pairs du développement, soit

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2} + x(\dots)$$

ce qui donne  $f''(0) = -2$  d'où

$$f(x) = 1 - x^2 + x^3 \varepsilon(x).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.17

À l'ordre 2, le développement de  $e^x$  et  $\sin x$

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)\right)(x + x^2 \varepsilon_2(x))$$

soit

$$e^x \sin x = x + x^2 + x^2 \varepsilon(x).$$

Vous pouvez calculer les dérivées de  $e^x \sin x$  pour vérifier ce résultat.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.18

Il faut diviser suivant les puissances croissantes les deux polynômes suivants :

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.19

Le développement de  $(1 + y)^{-1}$  s'obtient en faisant  $\alpha = -1$  dans celui de  $(1 + y)^\alpha$  :

$$(1 + y)^{-1} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + y^5 \varepsilon(y)$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 + x^5 \varepsilon(x).$$

Les calculs sont beaucoup moins importants que si l'on avait dû calculer les dérivées jusqu'à l'ordre 4.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.20

On prend le développement de  $(1 + y)^\alpha$  avec  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , ce qui donne

$$(1 + y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + y^2\varepsilon(y)$$

soit

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^5\varepsilon(x)$$

soit en intégrant (Arcsin  $x$  est une fonction impaire) :

$$\text{Arcsin } x = C + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^6\varepsilon(x).$$

Or  $C = \text{Arcsin } 0 = 0$ , donc

$$\text{Arcsin } x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^6\varepsilon(x).$$

La dérivée de  $\text{Arc tan } x$  est  $\frac{1}{1+x^2}$ , dont nous avons calculé un développement limité dans l'exercice [A.1.19](#). Il suffit alors d'intégrer ce développement limité pour obtenir celui de  $\text{Arc tan } x$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.1

Utiliser la formule de Taylor pour les polynômes en 0.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.1

Utiliser la formule de Taylor pour les polynômes en  $x_0$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 3, Exercice A.2.1

Calculer

$$p(1), p'(1), p''(1), p'''(1).$$

Puis utiliser la formule de Taylor pour les polynômes en 1.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.2

Il suffit de calculer les dérivées successives de chacune des fonctions jusqu'à l'ordre 5 puis d'appliquer la formule de Taylor-Lagrange. Attention aux points où on évalue les différentes dérivées.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.2

Par exemple pour v) on obtient :

$$\exists \theta \in ]0, 1[, \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \operatorname{ch}(\theta x).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.2

Est-ce que les fonctions précédentes tendent vers 0 quand  $x$  tend vers 0?

Comme les fonctions sont continues, la question devient

Est-ce que  $f(0) = 0$ ?

Si oui déterminer leur partie principale.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.2

On peut utiliser les développements de Taylor pour déterminer les parties principales

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2, Exercice A.2.2

Par exemple pour iii) et  $\alpha = 1$ , pour obtenir la partie principale de  $\sin x - x$ , on utilise le développement de Taylor précédent :

$$\exists \theta \in ]0, 1[, \sin x - x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cos(\theta x).$$

Diviser par  $x^3$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, Question 2, Exercice A.2.2

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} \cos(\theta x).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 5, Question 2, Exercice A.2.2

$\theta$  dépend de  $x$ , mais est borné.

Donc  $\theta x$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0.

Donc  $\cos(\theta x)$  tend vers 1.

Donc  $\frac{x^2}{5!} \cos(\theta x)$  tend vers 0.

Donc  $\frac{\sin x - x}{x^3}$  tend vers  $-\frac{1}{3!}$ .

Donc  $-\frac{x^3}{3!}$  est la partie principale de  $\sin x - x$ .

Le premier terme non nul du développement est la partie principale de l'infiniment petit.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 3, Exercice A.2.2

Il suffit de calculer les dérivées successives de chacune des fonctions jusqu'à l'ordre 3 puis d'appliquer la formule de Taylor-Lagrange. Attention aux points où on évalue les différentes dérivées.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 3, Exercice A.2.2

Par exemple pour iv) on obtient : il existe  $c$  strictement compris entre  $x$  et  $x_0$  tel que

$$(1+x)^4 - 1 = (1+x_0)^4 - 1 + 4(x-x_0)(1+x_0)^3 + 6(x-x_0)^2(1+x_0)^2 + 4(x-x_0)^3(1+c).$$

ou ce qui est équivalent en posant  $x = x_0 + h$  :

$$\exists \theta \in ]0, 1[, (1+x_0+h)^4 - 1 = (1+x_0)^4 - 1 + 4h(1+x_0)^3 + 6h^2(1+x_0)^2 + 4h^3(1+x_0+\theta h).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 4, Exercice A.2.2

Est-ce que les fonctions précédentes tendent vers 0 quand  $x$  tend vers  $x_0$ ?

Comme les fonctions sont continues, la question devient

Est-ce que  $f(x_0) = 0$ ?

Si oui déterminer leur partie principale.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 4, Exercice A.2.2

$f$  est donc un infiniment petit au voisinage de  $x_0$  si  $f(x_0) = 0$ .

Pour iv) en particulier, on cherche  $x_0$  tel que

$$(1 + x_0)^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (1 + x_0)^4 = 1.$$

Les quatre racines quatrièmes de 1 sont  $1, i, -1, -i$

Il existe donc deux nombres réels tels que  $(1 + x_0)^4 = 1$ , ce sont  $x_0 = 0$  et  $x_0 = -2$ .

On a supposé que  $x_0 \neq 0$ , donc  $x_0 = -2$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 4, Exercice A.2.2

Quand  $f(x)$  est un infiniment petit au voisinage de  $x_0$ , le terme constant du développement de Taylor en  $x_0$  est donc nul.  
La partie principale est alors le premier terme non nul dans le développement de Taylor.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.3

Ecrire la formule de Taylor-Lagrange.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice A.2.3

On approche  $f(a + h)$  par un polynôme en  $h$  faisant intervenir les dérivées successives de  $f$  évaluées en  $a$ . L'erreur commise est égale au reste de Taylor-Lagrange.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Exercice A.2.3

Le reste de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$  s'écrit :

$$E_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Exercice A.2.3

Quelles sont les dérivées successives de la fonction sinus?

Que vaut  $h$ ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 5, Exercice A.2.3

Attention, il faut exprimer les angles en radians.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 6, Exercice A.2.3

$$h = \frac{\pi}{180}.$$

La dérivée (n+1)ème de la fonction sinus est égale à cosinus ou -sinus ou -cosinus ou sinus.

Dans tous les cas elle est inférieure ou égale à 1 en valeur absolue

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 7, Exercice A.2.3

On a donc

$$E_n \leq \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Déterminer  $n$  pour que  $E_n \leq 10^{-3}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 8, Exercice A.2.3

$$h < \frac{3.6}{180} = 2 \times 10^{-2}.$$

On voit donc rapidement que  $n = 1$  devrait convenir.

On a en effet

$$E_1 \leq \frac{|h|^2}{2!} < 2 \times 10^{-4} \leq 10^{-3}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.4

Le développement de Taylor-Young nécessite le calcul des dérivées de  $(1 - \cos x)^2$  et  $\cos^2 x$ . Pensez à simplifier les expressions en utilisant les relations de  $\sin 2x$  par exemple.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.4

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_1(x),$$

$$(1 - \cos x)^2 = \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon_2(x),$$

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + x^4 \varepsilon_3(x).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.4

Vérifier vos calculs sachant que

$$(1 - \cos x)^2 = \cos^2 x + 2 \cos x + 1.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2a, Exercice A.2.4

Pour exprimer un développement d'ordre 4 d'une fonction au voisinage d'un point  $a$ , on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(a) + h^4\varepsilon(h).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2a, Exercice A.2.4

On obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}\right) + h^4 \varepsilon(h).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.4

On peut aussi écrire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \cos\frac{\pi}{4} \cos h - \sin\frac{\pi}{4} \sin h,$$

et considérer les développements de  $\cos h$  et  $\sin h$  au voisinage de 0. On retrouve alors les résultats de la question précédente.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.5

$$e^x \sqrt{1+x^2} = 1 + x + x^2 + x^2 \varepsilon(x),$$

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.6

Attention l'ordre d'un infiniment petit n'a rien à voir avec l'ordre d'un développement de Taylor! Voir le paragraphe [ordre d'un infiniment petit](#).

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.6

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x),$$

d'où

$$\sin x - x = -\frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x),$$

ce qui donne comme partie principale

$$-\frac{1}{3!}x^3.$$

L'ordre de l'infiniment petit est donc 3.

Faites de même pour les autres fonctions.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 1, Exercice A.2.6

$$\sinh x = x + x\mathcal{E}(x),$$

l'ordre de l'infiniment est donc 1. La fonction  $\cosh x$  n'est pas un infiniment petit (pourquoi?).

$$\frac{x}{1+x} = x + x\mathcal{E}(x),$$

l'ordre de l'infiniment est donc 1.

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{2} + x\mathcal{E}(x),$$

l'ordre de l'infiniment est donc 1.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.6

Vous pouvez les écrire sous la forme  $f(a + h)$  et éventuellement remplacer ensuite  $(a + h)$  par  $x$ , d'où  $h$  par  $x - a$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.6

Ainsi

$$e^{a+h} = e^a(e^h) = e^a\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon(h)\right),$$

qui peut se récrire

$$e^x = e^a\left(1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2} + \frac{(x-a)^3}{6} + (x-a)^3\varepsilon(x-a)\right).$$

Tout calcul fait :

$$\cos(a+h) = \cos a - h \sin a - \frac{h^2}{2} \cos a + \frac{h^3}{6} \sin a + h^3\varepsilon(h).$$

$$\sin(a+h) = \sin a + h \cos a - \frac{h^2}{2} \sin a - \frac{h^3}{6} \cos a + h^3\varepsilon(h).$$

$$\cosh(a+h) = \cosh a + h \sinh a + \frac{h^2}{2} \cosh a + \frac{h^3}{6} \sinh a + h^3\varepsilon(h).$$

$$\sinh(a+h) = \sinh a + h \cosh a + \frac{h^2}{2} \sinh a + \frac{h^3}{6} \cosh a + h^3\varepsilon(h).$$

$$\frac{1}{1-(a+h)} = \frac{1}{1-a} + \frac{h}{(1-a)^2} + \frac{h^2}{(1-a)^3} + \frac{h^3}{(1-a)^4} + h^3\varepsilon(h),$$

soit encore

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-a} + \frac{x-a}{(1-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(1-a)^3} + \frac{(x-a)^3}{(1-a)^4} + (x-a)^3\varepsilon(x-a).$$

$$\sqrt{a+h} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{h}{2a} - \frac{h^2}{8a^2} + \frac{h^3}{16a^3} + h^3\varepsilon(h)\right).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 3, Exercice A.2.6

La solution est :

$$\ln(1+x) = \ln(1+a) + \frac{x-a}{1+a} - \frac{(x-a)^2}{2(1+a)^2} + (x-a)^2 \varepsilon(x-a),$$

$$\arctan x = \arctan a + \frac{x-a}{1+a^2} - \frac{a(x-a)^2}{(1+a^2)^2} + (x-a)^2 \varepsilon(x-a).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.7

Appliquer le théorème permettant d'obtenir le développement limité d'un produit de deux fonctions.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.8

Appliquer le théorème permettant d'obtenir le développement limité d'un quotient de deux fonctions à l'aide de la division selon les puissances croissantes.

On vérifie que la fonction au dénominateur ne s'annule pas en 0 comme c'est demandé dans le théorème.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.8

On effectue la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3, des polynômes

$$A(h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \text{ par } B(h) = 1 + h - \frac{h^3}{6}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 1, Exercice A.2.8

Si  $Q$  est le quotient de la division de  $A$  par  $B$  à l'ordre 3, on a :

$$\frac{\ln(1+h)}{1+\sin h} = Q(h) + h^3\epsilon(h) = h - \frac{3h^2}{2} + \frac{11h^3}{6} + h^3\epsilon(h).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.8

$\sin x$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0.

Donc en composant le développement limité de  $\sin x$  au voisinage de 0 et celui de  $\frac{1}{1+x}$  au voisinage de 0, on obtient le développement limité de  $\frac{1}{1+\sin x}$  au voisinage de 0.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.8

$$\sin h = h - \frac{h^3}{3!} + h^3 \epsilon(h) = P(h) + h^3 \epsilon(h).$$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3 \epsilon(u) = Q(u) + u^3 \epsilon(u).$$

Calculer

$$Q(P(h)).$$

Ne garder que les termes de degré inférieur ou égal à trois.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.8

On obtient

$$\frac{1}{1 + \sin h} = 1 - h + h^2 - \frac{5h^3}{6} + h^3 \epsilon(h).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 3, Exercice A.2.8

Appliquer le théorème permettant d'obtenir le développement limité d'un produit de deux fonctions.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 4a, Exercice A.2.8

Pour  $\frac{e^x}{\cos x}$ , on vérifie que la fonction au dénominateur ne s'annule pas en 0.

Comme précédemment, on peut obtenir le développement limité de  $\frac{e^x}{\cos x}$  de deux façons différentes :

- Faire un division suivant les puissances croissantes.
- faire le développement limité d'une fonction composée puis le développement limité d'un produit.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 4a, Exercice A.2.8

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + h^3 \epsilon_1(h) = A(h) + h^3 \epsilon_1(h).$$

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2!} + h^3 \epsilon_2(h) = B(h) + h^3 \epsilon_2(h).$$

Effectuer la division de  $A$  par  $B$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 4a, Exercice A.2.8

2ème méthode :

On veut un développement limité au voisinage de 0 de  $\frac{1}{\cos x}$  en écrivant cette fonction comme une fonction composée de  $\cos x$  et de  $\frac{1}{x}$ .

Quelle est la limite  $a$  de  $\cos x$  quand  $x$  tend vers 0?

Il faudra donc un développement limité au voisinage de  $a$  de  $\frac{1}{x}$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, Question 4a, Exercice A.2.8

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2!} + h^3 \epsilon_1 h = 1 + P(h) + h^3 \epsilon_1(h)$$

$$a = \cos 0 = 1$$

Donc il faut un développement limité de  $\frac{1}{x}$  au voisinage de 1, c'est à dire  $\frac{1}{1+u}$  au voisinage de 0.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 5, Question 4a, Exercice A.2.8

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2!} + h^3 \epsilon_1 h = 1 + P(h) + h^3 \epsilon_1(h)$$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3 \epsilon_2(u) = Q(u) + u^3 \epsilon_2(u).$$

Calculer  $Q(P(h))$ , ne garder que les termes de degré inférieur ou égal à 3.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 4b, Exercice A.2.8

ATTENTION pour  $\frac{\sin x}{x}$ , la fonction au dénominateur tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0!

On n'est donc pas exactement dans le cadre du théorème sur le développement limité d'un quotient.

Heureusement le numérateur tend lui aussi vers 0 et de plus  $\frac{\sin x}{x}$  admet une limite quand  $x$  tend vers 0.

On écrit le développement limité à l'ordre 4 de  $\sin x$  au voisinage de 0

On simplifie par  $h$  : c'est possible car le terme constant dans l'expression de  $\sin h$  est nul : pourquoi?

On obtient alors le développement limité à l'ordre 3 de  $\frac{\sin x}{x}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 4c, Exercice A.2.8

ATTENTION pour  $\frac{x}{\sin x}$ , la fonction au dénominateur tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0!

On n'est donc pas exactement dans le cadre du théorème sur le développement limité d'un quotient.

Heureusement le numérateur tend lui aussi vers 0 et de plus  $\frac{x}{\sin x}$  admet une limite quand  $x$  tend vers 0.

Pour utiliser ce qui précède, on peut écrire :

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}.$$

Il suffit donc d'obtenir le développement limité de l'inverse de  $\frac{\sin x}{x}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 4c, Exercice A.2.8

Pour obtenir le développement limité de l'inverse de  $\frac{\sin x}{x}$ , il existe deux méthodes :

- On peut appliquer le théorème sur le développement limité d'un quotient de fonctions.
- On peut appliquer le théorème sur le développement limité d'une composée de fonctions

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 4c, Exercice A.2.8

Pour obtenir le développement limité de l'inverse de  $\frac{\sin x}{x}$  à l'aide du théorème sur le quotient de fonctions, on a

$$1 = A(h).$$

$$\frac{\sin h}{h} = B(h) + h^3 \epsilon(h).$$

Puisque  $\frac{\sin x}{x}$  ne tend pas vers 0 quand  $x$  tend vers 0, on a bien

$$B(0) \neq 0$$

donc les hypothèses du théorème sur le développement limité d'un quotient sont satisfaites.  
Il suffit d'effectuer la division de  $A$  par  $B$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Question 4c, Exercice A.2.8

Pour obtenir le développement limité de l'inverse de  $\frac{\sin x}{x}$  à l'aide du théorème sur les fonctions composées, on compose la fonction  $\frac{\sin x}{x}$  avec la fonction  $\frac{1}{x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Donc on veut le développement limité de  $\frac{1}{x}$  au voisinage de 1, c'est à dire le développement limité au voisinage de 0 de  $\frac{1}{1+u}$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 5, Question 4c, Exercice A.2.8

$$\frac{\sin h}{h} = 1 + P(h) + h^3 \epsilon_1(h).$$

$$\frac{1}{1+u} = Q(u) + u^3 \epsilon_2(u).$$

Calculer  $Q(P(h))$ , ne garder que les termes de degré inférieur ou égal à 3.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.9

Pensez au développement de  $(1 + u)^\alpha$  au voisinage de 0 et composez avec le développement de  $u$ . Pour les deux premières, vous pouvez aussi utiliser le quotient des deux polynômes.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.9

- Pour  $\alpha = -1$  et  $u = -x$ , on obtient :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x),$$

On pourrait obtenir le même résultat en divisant 1 par  $1+x$ . - On prend  $\alpha = -1$  et  $u = x^2$  :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^p x^{2p} + x^{2p} \varepsilon(x),$$

si  $n = 2p$  c'est à dire  $n$  est pair, et

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^p x^{2p} + x^{2p+1} \varepsilon(x),$$

si  $n = 2p + 1$  c'est à dire  $n$  est impair. - On prend  $\alpha = -1/2$  et  $u = -x^2$  :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\frac{(-x^2)^2}{2} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-p+1\right)\frac{(-x^2)^p}{p!} + x^{2p} \varepsilon(x),$$

si  $n = 2p$  c'est à dire  $n$  est pair, et

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\frac{(-x^2)^2}{2} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-p+1\right)\frac{(-x^2)^p}{p!} + x^{2p+1} \varepsilon(x),$$

si  $n = 2p + 1$  c'est à dire  $n$  est impair.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.9

Pensez au quotient des développements limités.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.9

Le développement de  $\cos x$  à l'ordre 4 est

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x).$$

D'où

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x).$$

On ne peut faire le quotient de développements limités lorsque le dénominateur s'annule, ce qui est le cas de  $x$ . Mais on comprend aisément que pour obtenir un développement d'ordre  $n$  de  $f(x)/x$ , il suffit de développer  $f(x)$  à l'ordre  $n+1$  et de diviser par  $x$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.9

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon(x) - 1 \right),$$

soit

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + x^2 \varepsilon(x).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.10

Utiliser les résultats sur le quotient des développements limités en n'oubliant pas que le dénominateur ne doit pas s'annuler.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.10

Le développement de  $\tan x$  à l'ordre 5 s'obtient en effectuant le quotient de la partie régulière du développement de  $\sin x$  à l'ordre 5, soit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x),$$

par la partie régulière du développement de  $\cos x$  à l'ordre 5, soit

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x),$$

ce qui donne

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 \varepsilon(x).$$

De même, on obtient

$$\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + x^2 \varepsilon(x),$$
$$\frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48} + x^3 \varepsilon(x).$$

Attention,  $x$  s'annule en  $x = 0$ , mais puisque

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6 \varepsilon(x),$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^5 \varepsilon(x).$$

Attention,  $\sin x$  s'annule en  $x = 0$ ! On écrit alors

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x)},$$

soit

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^4 \varepsilon(x)} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{7x^4}{360} + x^4 \varepsilon(x).$$

Il en est de même pour la dernière fonction dont vous montrerez que son développement limité donne

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon(x)} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + x^2 \varepsilon(x).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.10

On essaye de se ramener à des développements de fonctions connues en composant des développements connus. Attention lorsque l'on compose des développements il faut une compatibilité entre les points au voisinage desquels on développe!

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.10

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3 \varepsilon(u), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon(x),$$

d'où, en composant

$$\ln(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x).$$

Il y a une difficulté dans le suivant puisque  $\cos x$  ne s'annule pas en  $x = 0$ . On peut considérer que  $\cos x - 1$  s'annule en  $x = 0$  et écrire

$$\ln(1 + \cos x) = \ln(2 + \cos x - 1) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{\cos x - 1}{2}\right).$$

On écrit alors le développement de  $\frac{\cos x - 1}{2}$  à l'ordre 3 au voisinage de 0

$$\frac{\cos x - 1}{2} = -\frac{x^2}{4} + x^3 \varepsilon(x),$$

ce qui donne

$$\ln(1 + \cos x) = \ln 2 - \frac{x^2}{4} + x^3 \varepsilon(x).$$

Pour les suivants on compose avec des développements de  $(1+u)^{1/2}$ . On obtient, tous calculs faits,

$$\sqrt{\cos x} = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + x^4 \varepsilon(x),$$

à condition décrire que

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 + (\cos x - 1)}.$$

De même

$$\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x)\right)$$

à condition décrire que

$$\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2 + (\cos x - 1)} = \sqrt{2} \sqrt{1 + (\cos x - 1)/2}.$$

Pour la suivante, il faut faire attention au développement de  $e^x$  qu'il faut exprimer au voisinage de 1 et non de 0 :

$$e^{\sqrt{1+x}} = e\left(1 + \frac{x}{2} + x^2 \varepsilon(x)\right).$$

Pour la dernière pensez à passer en ln :

$$(1+x)^{1/x} = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + x^2 \varepsilon(x)\right).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.11

Il n'y a aucune difficulté théorique. Il s'agit d'utiliser le développement de Taylor-Young, ce qui nécessite le calcul des deux premières dérivées des fonctions au point  $a$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice A.2.11

Voici les résultats :

$$\tan\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2u + 2u^2 + u^2\varepsilon(u),$$

soit en posant  $x = u + \frac{\pi}{4}$  ou  $u = x - \frac{\pi}{4}$

$$\tan(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\varepsilon\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

De même, si l'on ne donne plus que la deuxième forme :

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2} = \ln 2 + \left(\frac{1}{2} - 2\ln 2\right)(x-1) + \left(3\ln 2 - \frac{9}{8}\right)(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon((x-1)),$$

$$\sqrt{\tan x} = 1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\varepsilon\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$\sin(\pi \cos x) = 1 - \frac{3\pi^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}{8} + \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\varepsilon\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right),$$

$$e^{\sin x} = \sqrt{e}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{8}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2\varepsilon\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)\right),$$

$$\ln(\sin x) = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\varepsilon\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.12

Quelle est la dérivée de la fonction  $f$ ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice A.2.12

Quel théorème pouvez-vous utiliser?

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Exercice A.2.12

$$g(x) = f'(x) = e^{x^2}.$$

On peut déterminer un développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction  $g$ . Puis en utilisant le théorème sur le développement limité d'une primitive, on obtient un développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de  $G(x) = f(x)$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1a, Exercice A.2.14

Utiliser le développement limité connu :

$$\ln(1 + u) = 1 + u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^2 \epsilon(u).$$

Puis remplacer  $u$  par  $\frac{x}{2}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1b, Exercice A.2.14

On a

$$\ln(2 + x) = \ln\left(2\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right).$$

Utiliser le résultat de la question précédente.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1c, Exercice A.2.14

Dans l'exercice [A.2.2](#) on a déterminé un développement de Taylor-Lagrange en 0 pour la fonction  $\ln(2 + x)$ , en modifiant le reste on obtient immédiatement un développement de Taylor-Young, donc un développement limité.

Comparer, on doit retrouver le développement obtenu à la question précédente.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2a, Exercice A.2.14

Il faut obtenir le développement limité de la composée de deux fonctions.

Lesquelles?

Pour chacune d'elles, au voisinage de quel point?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 2a, Exercice A.2.14

$$\ln(1 + \cos x) = g(f(x)),$$

avec

$$f(x) = 1 + \cos x,$$

$$g(x) = \ln x.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2a, Exercice A.2.14

Si on pose  $f(x) = 1 + \cos x$ , déterminer le développement limité de  $f$  au voisinage de 0 à l'ordre 3.

De plus  $f(0) = 2$ .

Le terme constant de son développement limité sera donc égal à 2.

Si on pose  $g(x) = \ln x$ , il faut donc déterminer un développement limité de  $g$  au voisinage de 2 à l'ordre 3.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, Question 2a, Exercice A.2.14

$$1 + \cos h = 2 - \frac{h^2}{2!} + h^3 \epsilon_1(h) = 2 + P(h) + h^3 \epsilon_1(h).$$

$$\ln(2 + u) = \ln 2 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{24} + u^3 \epsilon_2(u) = Q(u) + u^3 \epsilon_2(u).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 5, Question 2a, Exercice A.2.14

La partie régulière  $S(h)$  du développement limité de  $\ln(1 + \cos x)$  au voisinage de 0 sera donc égale à  $Q(P(h))$  privé des termes de degré strictement supérieur à 3.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.14

Il faut obtenir le développement limité de la composée de deux fonctions.

Lesquelles?

Pour chacune d'elles, au voisinage de quel point?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 2b, Exercice A.2.14

$$\ln(1 + \sin x) = g(f(x)),$$

avec

$$f(x) = 1 + \sin x,$$

$$g(x) = \ln x.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2b, Exercice A.2.14

Si on pose  $f(x) = 1 + \sin x$ , déterminer le développement limité de  $f$  au voisinage de 0 à l'ordre 3.

De plus  $f(0) = 1$ .

Le terme constant de son développement limité sera donc égal à 1.

Si on pose  $g(x) = \ln x$ , il faut donc déterminer un développement limité de  $g$  au voisinage de 1 à l'ordre 3.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, Question 2b, Exercice A.2.14

$$1 + \sin h = 1 + h - \frac{h^3}{3!} + h^3 \epsilon_1(h) = 1 + P(h) + h^3 \epsilon_1(h).$$

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3 \epsilon_2(u) = Q(u) + u^3 \epsilon_2(u).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 5, Question 2b, Exercice A.2.14

La partie régulière  $S(h)$  du développement limité de  $\ln(1 + \sin x)$  au voisinage de 0 sera donc égale à  $Q(P(h))$  privé des termes de degré strictement supérieur à 3.

Faire le calcul.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.16

Le domaine de définition est évidemment :

$$D_f = x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

et pour le domaine d'étude, utilisez la périodicité de  $|\cos x|$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.16

La période de  $|\cos x|$  est  $\pi$  (pourquoi?). De plus la fonction est paire ce qui ramène le domaine d'étude à  $[0, \frac{\pi}{2}[$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.16

Cette question a été traitée en terminal et ne pose aucune difficulté puisque  $|\cos x| = \cos x$  sur l'intervalle considéré.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 3, Exercice A.2.16

Il faut utiliser le développement limité de  $f$  à un ordre suffisant pour pouvoir en déduire le signe de  $f(x) + \frac{x^2}{2}$  au voisinage de 0.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 3, Exercice A.2.16

Il s'agit de composer des développements limités. Remarquez que  $\cos x$  est positif au voisinage de 0, ce qui simplifie  $f$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 3, Exercice A.2.16

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x)\right) = \ln(1 + u).$$

Utilisez alors le développement de  $\ln(1 + u)$  au voisinage de  $u = 0$  pour conclure

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4 \varepsilon(x).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.17

Il s'agit de composer les développements limités de fonctions. Il faut donc faire attention aux conditions de compatibilité et à l'ordre des développements considérés.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.17

$\sin 0 = 0$ , donc on développe  $\sin x$  et  $e^x$  au voisinage de 0 à l'ordre 4. On obtient

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.17

Il s'agit de composer les développements limités de fonctions. Il faut donc faire attention aux conditions de compatibilité et à l'ordre des développements considérés.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.17

$\sqrt{3}(\cos 0 + \sin 0) = \sqrt{3}$ , il faut donc développer  $\arctan u$  au voisinage de  $\sqrt{3}$  à l'ordre 2 (utilisez un développement de Taylor-Young). On obtient

$$\arctan(\sqrt{3}(\cos x + \sin x)) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}x}{4} - \frac{5\sqrt{3}x^2}{16} + x^2\varepsilon(x).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 3, Exercice A.2.17

Il s'agit de composer les développements limités de fonctions. Il faut donc faire attention aux conditions de compatibilité et à l'ordre des développements considérés.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 3, Exercice A.2.17

$\frac{1-0}{1+0} = 1$ , il faut donc développer  $\arctan u$  au voisinage de 1 à l'ordre 3 (utilisez un développement de Taylor-Young). On obtient

$$\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4} - x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.18

Essayer de prévoir l'ordre qu'il est raisonnable de pouvoir atteindre.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice A.2.18

Quels que soient  $a$  et  $b$ ,  $f(x)$  est au moins un infiniment petit d'ordre 2. Pourquoi?

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Exercice A.2.18

On a toujours  $f(0) = 0$ , de plus  $f$  est paire.

Donc dans le développement limité de  $f$  le terme constant et le terme d'ordre 1 seront nuls quels que soient  $a$  et  $b$ .  
Continuer le raisonnement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Exercice A.2.18

Pour les raisons citées précédemment, on aura

$$f(x) = a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + x^6\epsilon(x).$$

$a_2, a_4, a_6$  vont dépendre de  $a$  et  $b$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 5, Exercice A.2.18

Il est probable que l'on pourra déterminer  $a$  et  $b$  tels que  $a_2 = 0$  et  $a_4 = 0$ .

Avec ce choix il est probable que  $a_6 \neq 0$ .

$f$  sera alors un infiniment petit d'ordre 6.

On calcule  $a_2, a_4, a_6$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 6, Exercice A.2.18

Pour obtenir le développement limité de  $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ , on peut faire, par exemple, une division suivant les puissances croissantes.

En effet le numérateur et le dénominateur étant des polynômes, on a immédiatement leur développement limité, la division permet d'obtenir celui du quotient.

On peut également obtenir le développement limité de  $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$  en effectuant le produit des développements limités de  $1+ax^2$  et  $\frac{1}{1+bx^2}$ . Le développement limité de  $\frac{1}{1+bx^2}$  étant obtenu à partir de celui de  $\frac{1}{1+t}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 7, Exercice A.2.18

Après calculs on obtient :

$$a_2 = -\frac{1}{2} + (a - b), \quad a_4 = \frac{1}{24} - b(a - b), \quad a_6 = -\frac{1}{6 \times 120} + b^2(a - b).$$

Déterminer  $a$  et  $b$  et trouver la partie principale de  $f(x)$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 8, Exercice A.2.18

$$a_2 = a_4 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{12}, b = \frac{1}{12}.$$

On a alors

$$a_6 = \frac{1}{420}.$$

D'où le résultat.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.19

L'ordre d'un infiniment petit au voisinage de 0 est donné par le premier terme non nul du développement limité en 0. Il faut donc calculer les constantes  $a$  et  $b$  (ou  $c$  et  $d$  pour la deuxième fonction) qui vont éliminer le terme en  $x$ , puis le terme en  $x^2$  et éventuellement, si c'est possible le terme en  $x^3$  ...

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice A.2.19

$$\tan x + a \sin x + b \sin^2 x = \left(x + \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{15} + x^5 \varepsilon(x)\right) + a\left(x - \frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x)\right) + b\left(x^2 - 2\frac{x^4}{3!} + x^5 \varepsilon(x)\right).$$

Pour annuler le terme en  $x$ , il faut que  $1 + a = 0$  et pour annuler le terme en  $x^2$ , il faut que  $b = 0$ . On obtient alors

$$\tan x + a \sin x + b \sin^2 x = \left(x + \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{15} + x^5 \varepsilon(x)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x)\right) = \frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x),$$

ce qui donne un infiniment petit d'ordre 3. Résolvez le second de la même manière et vous trouverez :  $c = -1$ ,  $d = \frac{1}{2}$  et un infiniment petit d'ordre 2.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.20

Pour chacune des fractions, si on appelle  $N$  et  $D$  leurs numérateurs et dénominateurs respectifs on a

$$\lim_{x \rightarrow a} N(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} D(x) = 0$$

donc une indétermination de la forme  $\frac{0}{0}$

$N$  et  $D$  sont donc des infiniment petits au voisinage de  $a$ , pour lever cette indétermination, utiliser, si nécessaire, un développement limité connu ou un développement de Taylor-Young de  $N$  et  $D$  au voisinage de  $a$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.20

Pour i)

$$a = 0, h = x, N(h) = e^h - 1 = h + h\epsilon_1(h), D(h) = h, \text{ d'où } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Pour ii)

$$a = 1, h = x - 1, N(h) = \ln(1 + h) = h + h\epsilon_1(h), D(h) = h, \text{ d'où } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1.$$

Pour iii), c'est exactement la même chose que pour ii), en effet

$$a = 0, h = x, N(h) = \ln(1 + h) = h + h\epsilon_1(h), D(h) = h, \text{ d'où } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1.$$

Pour iv)

$$a = \frac{\pi}{3}, h = x - \frac{\pi}{3},$$

$$N(h) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = h \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + h\epsilon_1(h) = \frac{h}{2} + h\epsilon_1(h) \text{ développement de Taylor-Young,}$$

$$D(h) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -h \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + h\epsilon_2(h) = -\frac{\sqrt{3}}{2}h + h\epsilon_2(h) \text{ développement de Taylor-Young,}$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{2} + h\epsilon_1(h)}{-\frac{\sqrt{3}}{2}h + h\epsilon_2(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + \epsilon_1(h)}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \epsilon_2(h)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pour v)

$$a = \frac{\pi}{3}, h = x - \frac{\pi}{3},$$

$$N(h) = \sin h = h + h\epsilon_1(h),$$

$$D(h) = -2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} + h \right) - \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) \right) = -2 \left( -h \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) + h\epsilon_2(h) \right) = -2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} h + h\epsilon_2(h) \right) \text{ développement de Taylor-Young,}$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{-2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} + h \right) - \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) \right)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + h\epsilon_1(h)}{-2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} h + h\epsilon_2(h) \right)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + \epsilon_1(h)}{-2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \epsilon_2(h) \right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pour vi)

$$a = 0, h = x,$$

$$N(h) = e^h - e^{-h} = 2h + h\epsilon_1(h) \text{ somme de développements limités connus,}$$

$$D(h) = \sin h = h + h\epsilon_2(h).$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^{-h}}{\sin h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h\epsilon_1(h)}{h + h\epsilon_2(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + \epsilon_1(h)}{1 + \epsilon_2(h)} = 2.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2a, Exercice A.2.20

$$a = \frac{\pi}{4}, h = x - \frac{\pi}{4}.$$

Pour le numérateur, utiliser la formule de Taylor-Young en  $\frac{\pi}{4}$ , on obtient

$$N(h) = -\sqrt{2}h + h\epsilon_1(h).$$

Pour le dénominateur, on peut utiliser le développement limité d'une composée de fonctions, lesquelles? au voisinage de quels points?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2a, Exercice A.2.20

On a besoin du développement limité de la fonction tangente en  $\frac{\pi}{4}$  et de celui de la fonction  $\ln$  en 1. Pourquoi?

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2a, Exercice A.2.20

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1.$$

On a donc besoin d'un développement limité de  $\ln x$  en 1.

L'ordre 1 semble suffisant.

Utiliser, par exemple, la formule de Taylor-Young pour obtenir le développement limité de  $\tan x$  au voisinage de  $\frac{\pi}{4}$ .

Puis composer avec le développement connu de  $\ln x$  en de 1.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Question 2a, Exercice A.2.20

On obtient

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = 1 + 2h + h\epsilon_1(h).$$

$$\ln(1 + u) = u + u\epsilon_2(u).$$

D'où

$$D(h) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right) = 2h + h\epsilon_3(h).$$

Il reste à calculer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(h)}{D(h)}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 5, Question 2a, Exercice A.2.20

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(h)}{D(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{2}h + h\epsilon_1(h)}{2h + h\epsilon_3(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{2} + \epsilon_1(h)}{2 + \epsilon_3(h)} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.20

$$a = 0, h = x, N(h) = \ln(\cos h - 2 \sin h), D(h) = h.$$

Pour  $N(h)$ , utiliser le développement limité d'une fonction composée.

$\cos h - 2 \sin h$  en 0 : développements limités classiques.

$\ln x$  en 1 (pourquoi?) : là encore un développement limité classique.

L'ordre 1 devrait suffire.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 2b, Exercice A.2.20

$$\cos h - 2 \sin h = 1 - 2h + h\epsilon_1(h).$$

$$\ln(1 + u) = u + u\epsilon_2(u).$$

D'où

$$N(h) = \ln(\cos h - 2 \sin h) = -2h + h\epsilon_3(h).$$

Il reste à calculer très facilement

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(h)}{D(h)}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2c, Exercice A.2.20

Quand on doit calculer une limite quand  $x$  tend vers l'infini, il est souvent plus simple de poser  $t = \frac{1}{x}$  puis de calculer la limite quand  $t$  tend vers 0.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 2c, Exercice A.2.20

On a déjà calculé

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.21

Il s'agit de formes indéterminées donc vous lèverez l'indétermination en développant le numérateur et le dénominateur en 0 à un ordre suffisant, qu'il n'est pas toujours facile d'estimer a priori.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice A.2.21

Par exemple, le premier donne :

$$\frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \frac{\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)}{x^2 + x^2 \varepsilon(x)}.$$

On simplifie alors par  $x^2$ , puis on passe à la limite quand  $x$  tend vers 0 :

$$\frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon(x)}{1 + \varepsilon(x)}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon(x)}{1 + \varepsilon(x)} = \frac{1}{2}.$$

Vous ferez les limites suivantes de la même manière, et vous trouverez

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \arctan x}{x \sin^2 x} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x(1 - \cos x)} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2 - 2\sqrt{1+x}}{\cos x - 1} = -\frac{1}{2}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.22

Il s'agit de formes indéterminées donc vous lèverez l'indétermination en développant le numérateur et le dénominateur en  $a$  à un ordre suffisant, qu'il n'est pas toujours facile d'estimer a priori.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice A.2.22

Les premiers ne posent pas de difficultés particulières :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{x^3} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2} = 1.$$

$$\frac{e^{-x} \sin x - x + x^2}{x^4} \rightarrow \infty \text{ quand } x \rightarrow 0,$$

car après simplification le numérateur tend vers une constante alors que le dénominateur tend vers 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{(e^x - 1) \sin x} = \frac{1}{2}.$$

Dans le suivant on fait tendre  $x$  vers l'infini, il faut donc poser  $u = 1/x$  pour se ramener à faire tendre  $u$  vers 0 et donc pouvoir utiliser les développements limités en 0. On trouve alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \left( (1+u)^{\frac{1}{u}} - e \right) = -\frac{e}{2}.$$

La dernière fait intervenir un développement au voisinage de  $\frac{\pi}{4}$ , ce qui donne

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \tan x}{1 + \cos 4x} = \frac{1}{2}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.23

Tracer les courbes ne pose aucune difficulté mis à part qu'il faut savoir comment elles se situent l'une par rapport aux autres. Pour cela utiliser les développements limités en 0 pour connaître le signe des différences des différentes questions.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.23

On rappelle que l'équation de la tangente au point  $a$  à la courbe représentative de  $y = f(x)$  est donné par la partie régulière du développement limité de  $f$  en  $a$  à l'ordre 1. Donc la position de la courbe par rapport à sa tangente est donnée par les termes suivants du développement limité.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.23

L'équation de la tangente est  $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$  et la courbe est au-dessous de la tangente pour  $x > 0$  et au-dessus pour  $x < 0$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 3, Exercice A.2.23

On procède de même que dans la question précédente et on trouve une tangente d'équation  $y = 1$  avec une courbe qui est toujours au-dessous de sa tangente.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.24

Le plus simple est de "sortir"  $x$  de la racine. Mais attention à la valeur de  $\sqrt{x^2}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.24

Pour  $x > 0$ , on obtient

$$f(x) = x\left(2 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)$$

et pour  $x < 0$

$$f(x) = x\left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)$$

On en déduit facilement alors que  $f(x)$  tend vers l'infini avec le même signe quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ . (Quel est ce signe?)

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.24

Si vous avez factorisé par  $x$  dans la question précédente, la réponse est évidente.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.24

On obtient donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 3, Exercice A.2.24

Souvenez-vous de vos réflexes de terminal quand vous aviez une expression de la forme  $\sqrt{a} - b$  qui donnait une forme indéterminée en faisant tendre  $x$  vers l'infini.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 3, Exercice A.2.24

On obtient

$$f(x) - 3x = x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)$$

soit

$$f(x) - 3x = x \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

Il n'est pas alors difficile de passer à la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Faire le même raisonnement quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 4, Exercice A.2.24

Si l'on appelle  $b$  la limite de la question précédente, il faut démontrer que la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote. Il faut donc calculer  $f(x) - ax - b$  lorsque  $x$  tend vers l'infini et démontrer que la limite de cette quantité est égale à (à quoi au fait?)

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 4, Exercice A.2.24

Il faut donc démontrer que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax - b = 0$  naturellement! c'est la définition de l'asymptote. Pour déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote, il faut de plus voir si c'est par valeurs positives ou par valeurs négatives. Ce calcul nécessite une fois de plus la même astuce qu'en terminal.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 4, Exercice A.2.24

Calculons  $f(x) - ax - b$  au voisinage de  $+\infty$ .

$$f(x) - 3x - \frac{1}{2} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 1}} - \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 1}}$$

soit

$$f(x) - 3x - \frac{1}{2} = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{x})^2 - \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 1})(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}})}.$$

Le dénominateur tend vers  $\frac{1}{2}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et est toujours positif. Il suffit de simplifier le numérateur qui donne

$$\frac{3}{4x} - \frac{1}{4x^2}.$$

Ce numérateur tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , ce qui justifie que  $y = 3x + \frac{1}{2}$  est asymptote à la courbe au voisinage de  $+\infty$  et ce numérateur est positif au voisinage de  $+\infty$ . La courbe est donc au-dessus de l'asymptote.

Il vous reste à faire le même raisonnement au voisinage de  $-\infty$  mais avec la droite  $y = x - \frac{1}{2}$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 5, Exercice A.2.24

L'utilisation du développement limité de  $\frac{x}{x}$  au voisinage de l'infini va beaucoup simplifier les calculs. Quel changement de variable faut-il faire pour se ramener au voisinage de 0?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 5, Exercice A.2.24

Au voisinage de  $+\infty$ , on a vu que

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

On pose  $u = \frac{1}{x}$  et l'on utilise la composition des Développements limités.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 5, Exercice A.2.24

On utilise le développement limité de  $\sqrt{1+v}$  au voisinage de  $v = 0$  et on applique les règles sur la composition des Développements limités :

$$2 + \sqrt{1 + (u + u^2)} = 2 + 1 + \frac{1}{1}2(u + u^2) - \frac{1}{8}(u + u^2)^2 + u^2\varepsilon(u) = 3 + \frac{1}{2}u - \frac{3}{8}u^2 + u^2\varepsilon(u).$$

Finissez le calcul en revenant à la variable  $x$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 4, Question 5, Exercice A.2.24

Si l'on revient à la variable  $x$

$$f(x) = 3x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ceci redonne l'équation de l'asymptote puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) - 3x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

et la position de la courbe par rapport à l'asymptote puisque  $\frac{3}{8x}$  tend vers 0 par valeur positive quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .  
Faites le même raisonnement au voisinage de  $-\infty$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 1, Exercice A.2.25

Pour effectuer un développement limité au voisinage de l'infini, on se ramène au voisinage de 0 par un changement de variable. Lequel?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 1, Exercice A.2.25

On pose  $u = \frac{1}{x}$ . Alors la quantité à développer est la suivante :

$$u \frac{1}{e^u - 1} = u \frac{1}{u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3 \varepsilon(u)}$$

soit

$$u \frac{1}{e^u - 1} = \frac{1}{1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{6} + u^2 \varepsilon(u)} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{12} + u^2 \varepsilon(u).$$

Il vous reste à revenir à la variable  $x$ .

Comprenez-vous pourquoi on a du développer l'exponentielle à l'ordre 3?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 2, Exercice A.2.25

Reportez-vous à la méthode exposée dans la dernière question de l'exercice [A.1.13](#).

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 2, Exercice A.2.25

On part du développement à l'ordre 2 de  $\frac{f(x)}{x}$  au voisinage de l'infini, soit

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

ce qui donne

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{12x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Déduisez alors l'équation de l'asymptote et la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 2, Exercice A.2.25

L'équation de l'asymptote est  $y = x - \frac{1}{2}$  car

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x + \frac{1}{2}) = 0$$

et la courbe est au dessus de l'asymptote au voisinage de  $+\infty$  puisque  $\frac{3}{8x}$  tend vers 0 par valeur positive quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Et au voisinage de  $-\infty$ ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Question 3, Exercice A.2.25

Il suffit d'appliquer la méthode exposée dans les questions précédentes. Si vous n'y arrivez pas c'est que le raisonnement n'a pas été compris. Si, après avoir relu les aides, cela ne vous satisfait toujours pas, demandez de l'aide à un enseignant.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 1, Exercice A.2.26

On s'intéresse aux branches infinies de la courbe. Combien y en a-t-il?

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Exercice A.2.26

On a des branches infinies quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $-\infty$ ,  $0^+$ .

Quant  $x \rightarrow 0^+$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ , on a donc une asymptote d'équation  $x = 0$ , la courbe est à droite et en haut.

L'étude des branches infinies quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$  est moins immédiate. Utiliser les développements limités.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Exercice A.2.26

Comme on l'a vu en cours il faut faire un développement limité de  $\frac{f(x)}{x}$  au voisinage de l'infini.

[Retour à l'exercice ▲](#)

#### Aide 4, Exercice A.2.26

On pose  $t = \frac{1}{x}$ , on obtient après calcul d'un produit de développements limités :

$$\frac{f(x)}{x} = (1 + 2t)e^t = 1 + 3t + \frac{5}{2}t^2 + t^2\epsilon(t).$$

En déduire l'équation de l'asymptote et la position de la courbe par rapport à celle-ci.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 5, Exercice A.2.26

On a donc

$$f(x) = x + 3 + \frac{1}{x} \left( \frac{5}{2} + \epsilon \left( \frac{1}{x} \right) \right).$$

L'équation de l'asymptote est donc

$$y = x + 3.$$

Quelle est la position de la courbe par rapport à cette asymptote?

Etudier le signe de  $f(x) - x - 3$  quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 6, Exercice A.2.26

Quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$  l'expression  $\left(\frac{5}{2} + \epsilon \left(\frac{1}{x}\right)\right)$  tend vers  $\frac{5}{2}$ , elle est donc positive au voisinage de  $\pm\infty$ .

Le signe de  $f(x) - x - 3$  est donc celui de  $\frac{1}{x}$ , c'est à positif quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , négatif quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .

La courbe est au-dessus de l'asymptote quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , au-dessous quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)