Chapitre 7 : Intégrale simple et applications

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Printemps 2023

▽

Chapitre 7
Intégrale simple et applications

7.1 Définition de l'intégrale

7.1.1 Intégrale d'une fontion étagée

Exercices :
Exercice A.1.1
Exercice A.1.2
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4

Documents :
Document C.1.1

Commençons par définir une fonction étagée.

Définition 7.1.1. - *Soit* $[a,b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ $(a<b)$. *On appelle* ***subdivision*** *de* $I=[a,b]$ *tout ensemble fini de nombres réels* x_0, x_1,...,x_n *tels que :*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

- Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ *est* ***étagée*** *s'il existe une subdivision* x_0, x_1,...,x_n *de* I *telle que pour tout* $i = 1,2,\ldots,n$, f *est constante sur l'intervalle* $]x_{i-1}, x_i[$, *ce qui se traduit par : il existe* n *nombres réels* m_1, m_2,..., m_n *tels que :*

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \quad f(x) = m_i,$$

Une telle subdivision est dite ***adaptée*** *à* f.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition 7.1.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction étagée et soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ une subdivision adaptée à f. Notons m_i la valeur de f sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. La somme*

$$(x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + \cdots + (x_n - x_{n-1})m_n$$

qui ne dépend que de f, est appelée ***intégrale de f*** *et se note $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Cette définition nécessite de montrer que la somme

$$(x_1 - x_0)m_1 + \cdots + (x_n - x_{n-1})m_n$$

ne dépend pas de la subdivision, ce qui est fait dans le document référencé.

Si f est positive ou nulle sur $[a', b']$, tous les nombres m_i sont positifs ou nuls et $\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx$ est alors un nombre réel positif ou nul, qui correspond à l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les deux droites d'équation $x = a'$ et $x = b'$ et le graphe de la fonction. (Voir la figure (7.1.1) restreinte à l'intervalle $[a', b']$).

Par exemple $\int_0^1 dx = 1$ puisque $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ est une subdivision adaptée à la fonction $f(x) = 1, \forall x \in [0,1]$.

Soit $c \in [a,b]$, et soit la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ si $x \neq c$. Si $c \in]a,b[$, la subdivision $x_0 = a$, $x_1 = c$, $x_2 = b$ est adaptée à f et $\int_a^b = (c-a) \times 0 + (b-c) \times 0 = 0$. L'intégrale de f est aussi nulle si $c = a$ ou $c = b$. Vous montrerez en exercice que l'intégrale d'une fonction nulle sauf en un nombre fini de points est nulle.

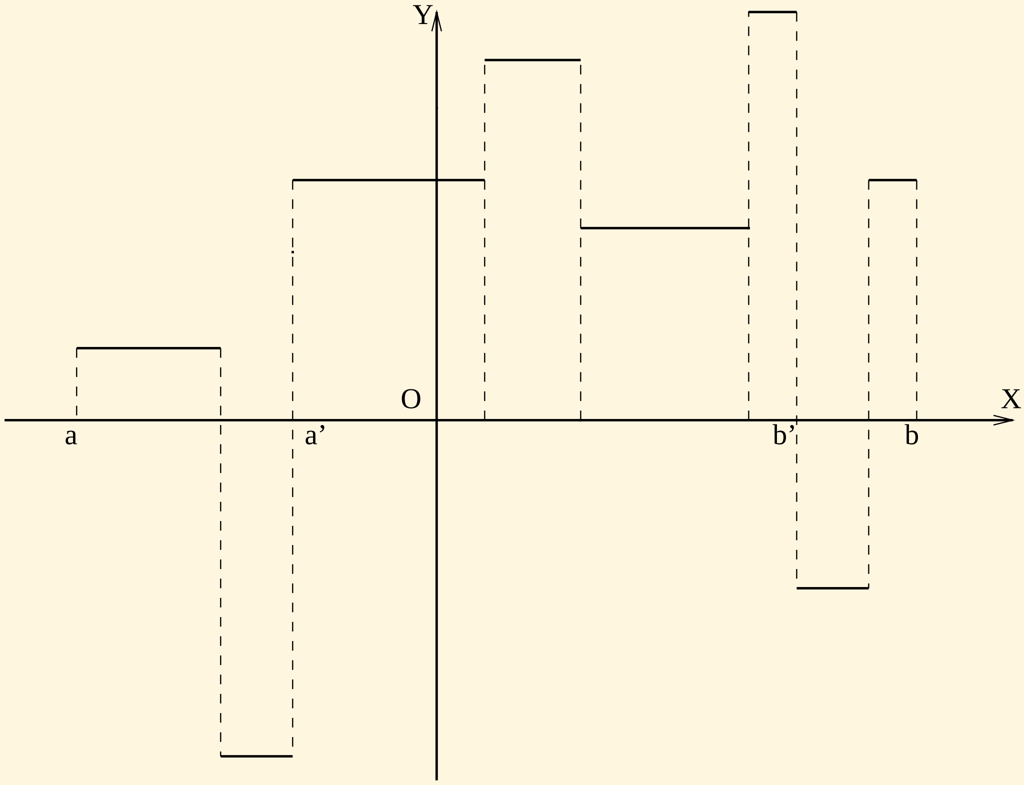


FIGURE 7.1.1 – Exemple de fonction étagée

7.1.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions étagées

Exercices :
Exercice A.1.5
Exercice A.1.6

Proposition 7.1.1. *Soient f et g deux fonctions étagées sur $[a,b]$, $(a<b)$.*

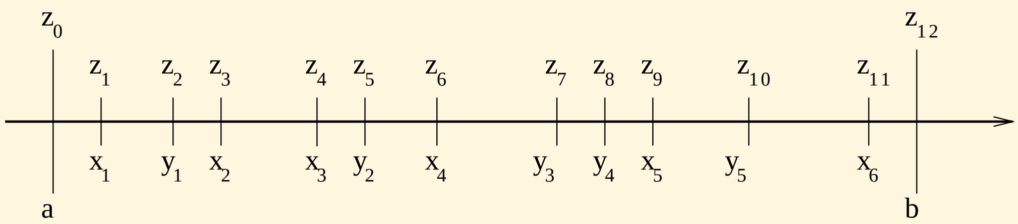
1. *La fonction $f+g$ est étagée et $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$,*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est étagée et $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$,*
3. *Si $f \geq g$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$,*
4. *Si f et g sont égales sauf en un nombre fini de points, alors :*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx,$$
5. *$\forall c \in]a,b[$, on a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.*

Démonstration -

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

1. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ une subdivision adaptée à f et $y_0, y_1, \ldots, y_m$ une subdivision adaptée à g. On considère $z_0, z_1, \ldots, z_p$ l'union des deux subdivisions qui est évidemment adaptée à la fonction $f+g$. Appelons α_i (resp. β_i) la valeur de f (resp. g) sur l'intervalle $]z_{i-1}, z_i[$.



3

FIGURE 7.1.2 – Exemple de réunion de subdivisions

Nous avons alors :

$$\forall x \in]z_{i-1}, z_i[, \quad (f+g)(x) = \alpha_i + \beta_i$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

et la définition de l'intégrale donne

$$\begin{aligned} \int_a^b (f+g)(x)\,dx &= (z_1-z_0)(\alpha_1+\beta_1) \\ &+ (z_2-z_1)(\alpha_2+\beta_2)+\cdots \\ &+ (z_p-z_{p-1})(\alpha_p+\beta_p) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx. \end{aligned} \tag{7.1.1, 7.1.2}$$

2. La démonstration est à faire en exercice.
3. Si $f \geq g$, alors la fonction étagée $f-g \geq 0$ et son intégrale est alors positive ou nulle (voir le cours référencé). On en déduit donc que $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f-g)(x)\,dx \geq 0$.
4. La démonstration est faite en exercice.
5. Posons
$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } a \leq x \leq c, \\ 0, & \text{si } c < x \leq b \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \leq x \leq c, \\ f(x), & \text{si } c < x \leq b. \end{cases}$$
Par définition, de f_1 et f_2, nous avons en tout point de $[a,b]$,
$$f_1(x)+f_2(x) = f(x)$$
et par définition de l'intégrale, nous avons $\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ ainsi que $\int_a^b f_2(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$, d'où le résultat.

Propriétés de l'intégrale des fonctions étagées

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.1.3 Fonction intégrable

Exercices :
Exercice A.1.7

Définition 7.1.3. *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ est* ***intégrable*** *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions étagées u et U définies sur $[a,b]$ telles que :*

$$u \leq f \leq U \text{ et } \int_a^b (U-u)(x)\,dx \leq \varepsilon.$$

Il est évident que toute fonction f étagée est intégrable (il suffit de prendre $u = U = f$).

Montrons que la fonction $f(x) = x$ est intégrable sur $[0,1]$. Pour n donné dans $\mathbb{N}$, posons $h = 1/n$ et $x_k = kh$, $k = 0,\ldots,n$, qui constitue une subdivision de $[0,1]$. On définit la fonction étagée u par $u(x) = x_k$ si $x \in [x_k, x_{k+1}[$ et la fonction étagée U par $U(x) = x_{k+1}$ si $x \in [x_k, x_{k+1}[$. Alors on a la figure (7.1.3) qui permet de comprendre aisément que $u \leq f \leq U$. D'autre part

$$\int_0^1 (U-u)(x)\,dx = (x_1-x_0)(x_1-x_0)+(x_2-x_1)(x_2-x_1)+\cdots \quad (7.1.3)$$

$$+ (x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-1}) = n \times h^2 = h. \quad (7.1.4)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Il en résulte que cette quantité est inférieure à un $\varepsilon > 0$ donné dès que l'on prend $h = \dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$, ce qui démontre l'intégrabilité.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

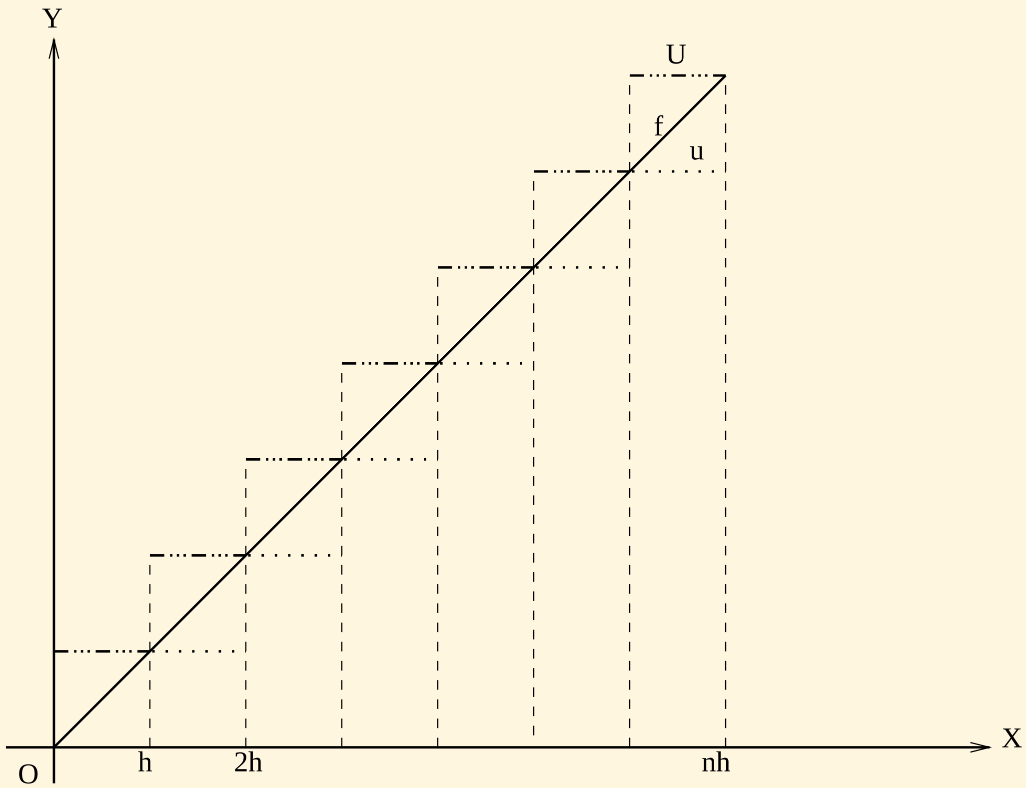


FIGURE 7.1.3 – Intégrabilité de la fonction $f(x) = x$

7.1.4 Définition de l'intégrale d'une fonction intégrable

Exercices :
Exercice A.1.8

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et considérons toutes les fonctions étagées inférieures ou égales à f. Puisque f est intégrable cet ensemble est non vide par définition et on appelle A l'ensemble des intégrales de ces fonctions. A est donc un ensemble non vide de nombres réels. De même on considère toutes les fonctions étagées supérieures ou égales à f et on appelle B l'ensemble des intégrales de ces fonctions. Soient $\alpha \in A$ (resp. $\beta \in B$) et appelons u la fonction étagée telle que $\int_a^b u(x)\,dx = \alpha$ (resp. U la fonction étagée telle que $\int_a^b U(x)\,dx = \beta$). Puisque $u \leq f \leq U$, on a $\alpha \leq \beta$. L'ensemble A est donc majoré (par tout élément de B) et l'ensemble B est minoré (par tout élément de A). Par conséquent la borne supérieure de A et la borne inférieure de B existent et l'on a $\sup A \leq \inf B$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné alors, par définition d'une fonction intégrable, il existe deux fonctions étagées u et U telles que $u \leq f \leq U$ et $\int_a^b (U - u)(x)\,dx \leq \varepsilon$. Si l'on appelle $\alpha = \int_a^b u(x)\,dx$ et $\beta = \int_a^b U(x)\,dx$ on a $\alpha \leq \sup A \leq \inf B \leq \beta$ et $\beta - \alpha \leq \varepsilon$. On obtient donc $0 \leq \inf B - \sup A \leq \varepsilon$ et comme $\varepsilon > 0$ est quelconque cela implique que $\sup A = \inf B$. On peut donc donner la définition suivante :

Définition 7.1.4. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, le nombre $\sup A = \inf B$ s'appelle l'**intégrale de** f et se note $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx}$.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Remarquons que lorsque f est étagée, l'intégrale de f est à la fois le plus grand élément de A et le plus petit élément de B.

Reprenons l'exemple de la fonction intégrable $f(x) = x$ sur $[0,1]$. Nous avons exhibé des fonctions étagées u et U telles que (voir figure 7.1.3)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u(x)\,dx &= h\times 0 + h\times h + h\times 2h + \cdots + h\times(n-1)h && (7.1.5)\\
&= h^2\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) && (7.1.6)\\
\int_0^1 U(x)\,dx &= h\times h + h\times 2h + h\times 3h + \cdots + h\times nh && (7.1.7)\\
&= h^2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) && (7.1.8)
\end{aligned}$$

On a donc pour tout n

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) \leq \sup A \leq \inf B \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Par passage à la limite quand n tend vers l'infini on obtient :

$$\frac{1}{2} \leq \sup A \leq \inf B \leq \frac{1}{2}$$

c'est à dire

$$\int_0^1 x\,dx = \sup A = inf B = \frac{1}{2}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Il est important de noter que dans l'écriture de l'intégrale le nom de la variable d'intégration (ici x) est *indifférent*. La lettre x peut être remplacée par n'importe quelle autre. C'est pourquoi, on rencontre aussi l'écriture plus simple $\int_a^b f$. Mais on verra l'utilité mnémotechnique

de l'écriture conventionnelle $\int_a^b f(x)\,dx$. On dit que dans cette écriture, x est une variable **muette**. Une écriture telle que $\int_a^x f(x)\,dx$ prêterait donc à confusion, car le x en haut du signe intégral doit être défini pour que l'intégrale (de la fonction f sur l'intervalle $[a,x]$) soit définie, tandis que les deux x sous le signe intégral ne sont pas définis. Dans ce cas il faut utiliser une autre lettre pour la variable d'intégration.

7.1.5 Propriétés élémentaires de l'intégrale d'une fonction intégrable

Exercices :
Exercice A.1.9
Exercice A.1.10

Documents :
Document C.1.2

Proposition 7.1.2. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, $(a<b)$.*

1. *La fonction $f+g$ est intégrable et*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

2. *$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est intégrable et $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$,*
3. *Si $f \geq g$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$,*
4. *Si f et g sont égales sauf en un nombre fini de points, alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx,$$

5. *$\forall c \in]a,b[$, on a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (cette égalité est appelée relation de Chasles).*

Démonstration -

1. Cette démonstration est donnée en référence.
2. Ceci se démontre (plus simplement) comme le résultat précédent.
3. La fonction $-g$ est intégrable ($\lambda = -1$) et donc la fonction $f - g$ est intégrable comme somme de deux fonctions intégrables. Si $0 \leq (f-g)$, puisque la fonction nulle est une fonction étagée inférieure à $(f-g)$, on a $0 = \int_a^b 0\,dx \leq \int_a^b (f-g)(x)\,dx$ et donc
$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f-g)(x)\,dx \geq 0,$$
ce qui démontre le résultat.
4. La démonstration est à faire en exercice.
5. La démonstration est à faire en exercice.

Corollaire 7.1.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Si m et M sont des nombres réels tels que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, alors on a*
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Démonstration - D'après la troisième propriété de la proposition précédente on a
$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$
et l'on a démontré que $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ ce qui donne le résultat puisque $b-a > 0$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.1.6 Intégrabilité des fonctions continues et continues par morceau

Exercices :
Exercice A.1.11

Documents :
Document C.1.3
Document C.1.4
Document C.1.5

Le résultat très important suivant se démontre grâce à la notion de continuité uniforme dont vous n'aviez pas encore vu l'utilité.

Théorème 7.1.1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f est intégrable sur $[a,b]$.*

La démonstration est donnée dans le premier document référencé. Pour les fonction continues on pourrait définir l'intégrabilité par l'intégrale de Riemann, ce qui est introduit dans le deuxième document référencé. Il est aussi beaucoup plus facile de montrer l'intégrabilité d'une fonction continue monotone, ce qui est démontré dans le troisième document référencé.

Proposition 7.1.3. *Si f est continue sur $[a,b[$ et $]b,c]$ et si f admet une limite à droite et une limite à gauche au point b, alors f est intégrable sur $[a,c]$.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - Puisque f est continue sur $[a,b[$ on peut la prolonger par continuité sur $[a,b]$ et elle est donc intégrable sur $[a,b]$. De même on peut définir l'intégrale de f sur $[b,c]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut définir des fonctions étagées u, v, U et V telles que

$$\begin{aligned} & u \leq f \leq U \text{ sur } [a,b], \\ & v \leq f \leq V \text{ sur } [b,c], \\ & \int_a^b (U-u)(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ & \int_b^c (V-v)(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Si l'on considère la fonction étagée w (resp. W) définie par $w = u$ (resp. $W = U$) sur $[a,b]$ et $w = v$ (resp. $W = V$) sur $]b,c]$, alors on a $w \leq f \leq W$ sur $[a,c]$ et $\int_a^c (W-w)(x)\,dx \leq \varepsilon$, ce qui montre que la fonction f est intégrable sur $[a,c]$.

On peut démontrer, de manière plus générale, qu'une fonction f continue sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points où elle admet seulement une limite à droite et une limite à gauche est intégrable.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.1.7 Intégrale et calcul d'aire

Exercices :
Exercice A.1.12

Soit f une fonction continue positive sur $[a,b](a<b)$, de même que l'intégrale d'une fonction étagée positive correspond à un calcul d'aire, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ correspond à l'aire du domaine D compris entre les axes $x=a$ et $x=b$, l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y=f(x)$. Il faut démontrer que $\sup A$ correspond à l'aire. Il est facile de voir que l'aire de D est un majorant de A et d'autre part l'aire de D est un minorant de B donc :

$$\text{aire } D \geq \sup A, \quad \text{aire } D \leq \inf B$$

or

$$\sup A = \inf B = \int_a^b f(x)dx$$

donc

$$\text{aire } D = \int_a^b f(x)dx$$

Si le signe de f varie, en découpant l'intervalle en sous intervalles tels que f garde un signe constant sur chacun d'eux, et en affectant un signe négatif à $\int_c^d f(x)\,dx$ si $f(x) \leq 0$ pour $c \leq x \leq d$, on étend cette interprétation de l'intégrale, comme une **aire algébrique**, à une fonction de signe variable. Mais les intégrales servent à calculer des grandeurs autres que des aires. Il s'agit en fait à la fois d'un concept et d'un des outils de base de l'analyse mathématique.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

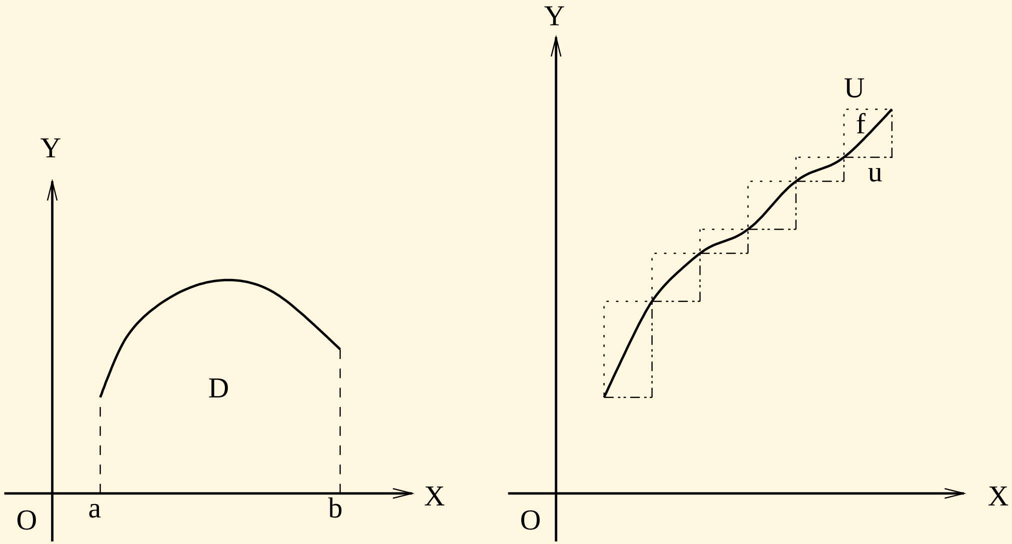


FIGURE 7.1.4 – intégrale et calcul d'aire

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.1.8 Intégrale et positivité

Exercices :
Exercice A.1.13

Proposition 7.1.4. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}, (a < b)$ une fonction intégrable, alors $|f|$ est intégrable et on a*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Démonstration - On admettra que $|f|$ est intégrable.

$$f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

$$-f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow -\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq -\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

On a donc

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \Leftrightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 7.1.5. *Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$, $(a<b)$ telle que*

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \geq 0$$

Alors si

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0, \tag{7.1.9}$$

f est identiquement nulle sur l'intervalle $[a,b]$.

Démonstration - On commence par montrer que f est identiquement nulle sur $]a,b[$. Raisonnons par contraposée en supposant qu'il existe un point c de $]a,b[$ tel que :

$$f(c) > 0.$$

Comme f est continue il existe $m > 0$ et un intervalle $[c-\eta, c+\eta] \subset]a,b[$, $(\eta > 0)$ tel que :

$$\forall x \in [c-\eta, c+\eta], \quad f(x) \geq m.$$

Il résulte des résultats précédents que

$$\int_{c-\eta}^{c+\eta} f(x)\,dx \geq 2\eta m > 0, \int_a^{c-\eta} f(x)\,dx \geq 0, \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx \geq 0,$$

d'où l'on déduit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\eta} f(x)\,dx + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f(x)\,dx + \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx \geq 2\eta m > 0$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

ce qui est la négation de (7.1.9).

Pour terminer, puisque f est continue sur $[a, b]$ et donc identiquement nulle sur]a,b[elle est également nulle en a et b.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.1.9 Intégrale-cas général

Remarquons que dans la définition nous avons supposé que $a < b$. Nous prendrons la **convention** suivante si $a \neq b$:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \tag{7.1.10}$$

l'un des deux membres de (7.1.10) étant nécessairement défini au sens de la définition donnée. Donc attention dans $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, on n'a pas toujours $a \leq b$.

Nous avons aussi la convention suivante, qui peut évidemment être considérée comme le cas limite de (7.1.10) quand $b \mapsto a$:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{7.1.11}$$

Certaines propriétés énoncées avec $a < b$ sont encore valables, d'autres non. En particulier voici quelques résultats différents lorsque $a > b$

Proposition 7.1.6. *On suppose que $a > b$, f et g sont des fonctions intégrables sur $[b,a]$ alors :*

1.
$$\text{Si } f \leq g, \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

2.
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Dans la suite, sauf précision contraire, nous supposerons que a et b sont quelconques.

7.1.10 Intégrale et primitive d'une fonction continue

Exercices :
Exercice A.1.14
Exercice A.1.15

Cours :
Intégrale - Propriétés

La propriété très importante suivante est connue dans la littérature anglo-saxone sous le nom de **Théorème fondamental de l'analyse**.

Théorème 7.1.2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle Ω et a un point de Ω. Alors la fonction F définie sur Ω par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{7.1.12}$$

est dérivable sur Ω (donc continue) et on a

$$F'(x) = f(x). \tag{7.1.13}$$

La fonction $F(x)$ est donc la primitive de f qui s'annule en $x = a$.

Démonstration - Pour $x \in \Omega$ et h tel que $x + h$ appartienne aussi à Ω, nous pouvons écrire (d'après la relation de Chasles) :

$$F(x+h) = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

et donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) = f(x),$$

d'après la proposition suivante. D'où le théorème.

Proposition 7.1.7. *Soit f une fonction continue sur Ω et $x\in\Omega$, alors*

$$\lim_{\substack{h\to 0,\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x). \qquad (7.1.14)$$

Démonstration - Nous allons raisonner dans le cas $h>0$, le cas $h<0$ est à étudier en exercice. Soient

$$m(h) = \min_{x\le t\le x+h} f(t) \quad \text{et} \quad M(h) = \max_{x\le t\le x+h} f(t),$$

alors on peut utiliser le corollaire (7.1.1) :

$$h\,m(h) \le \int_x^{x+h} f(t)\,dt \le hM(h). \qquad (7.1.15)$$

Mais, comme f est continue, on a

$$\lim_{h\to 0} m(h) = \lim_{h\to 0} M(h) = f(x)$$

et la relation (7.1.14) résulte alors de (7.1.15) après division par h.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ainsi, en appliquant le théorème précédent, nous voyons que :

$$\int_0^x \cos t\, dt = \sin x, \quad \int_0^x \sin t\, dt = -\cos x + 1, \quad \int_1^x t\, dt = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

Remarque 7.1.1. Soit F une primitive quelconque de f et soit F_a la primitive qui s'annule en a, alors $F = F_a + C$ et donc

$$\int_a^b f(x)\, dx = F_a(b) = F(b) - C.$$

Or $F(a) = C$ puisque $F_a(a) = 0$ et donc

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.1.11 Les théorèmes de la moyenne

Exercices :
Exercice A.1.16

Théorème 7.1.3. (Premier théorème de la moyenne)
Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I, si a et b distincts appartiennent à I, alors il existe c strictement compris entre a et b tel que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c). \tag{7.1.16}$$

Démonstration - a et b jouent des rôles similaires, on peut donc, sans restreindre la généralité, supposer que $a < b$.

Ce théorème est une conséquence directe du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

qui est dérivable sur $]a, b[$. On peut donc écrire

$$F(b) - F(a) = (b-a)\,F'(c)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

ce qui est exactement (7.1.16).

Théorème 7.1.4. (Deuxième théorème de la moyenne)

Si f et g sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I, si g garde un signe constant sur I, si a et b distincts appartiennent à I, alors il existe c strictement compris entre a et b tel que :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (7.1.17)$$

Démonstration - Là encore on peut supposer $a < b$.

Si la fonction g est identiquement nulle, le théorème est trivialement vrai. On suppose donc que g n'est pas identiquement nulle. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que la fonction g est positive (sinon on applique le raisonnement à la fonction $-g$). D'après la proposition 7.1.5 on a donc $\int_a^b g(x)dx > 0$, de plus l'inverse de ce nombre réel existe et il est strictement positif.

f est continue sur I, donc il existe m et M tels que $f([a,b]) = [m,M]$. De plus g est positive, on a donc la double inégalité :

$$\forall x \in [a,b], \quad m\,g(x) \leq f(x)g(x) \leq M\,g(x),$$

par suite

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (7.1.18)$$

On peut multiplier les termes de l'inégalité par le réel strictement positif $\frac{1}{\int_a^b g(x)\,dx}$, on obtient

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer l'existence de $c \in [a,b]$ vérifiant (7.1.17).

Il resterait à prouver que c est strictement compris entre a et b, mais l'argumentation doit être un peu plus poussée et elle ne sera pas développée ici.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.1.12 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercices :
Exercice A.1.17

Théorème 7.1.5. **(Inégalité de Cauchy-Schwarz)** *Soient $a \leq b$, f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a,b]$. Nous avons alors :*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{7.1.19}$$

Démonstration - Si $a = b$ l'inégalité est trivialement vérifiée, on va donc supposer $a < b$.

Si $\forall x \in [a,b]$, $g(x) = 0$, l'inégalité est trivialement vérifiée, on va donc supposer que g n'est pas identiquement nulle sur $[a,b]$, donc $\displaystyle\int_a^b g^2(x)\,dx > 0$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a alors l'inégalité :

$$0 \leq \int_a^b ((f(x) + \theta\, g(x))^2\,dx,$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

qui se développe sous la forme :

$$0 \leq \int_a^b (f(x))^2 \, dx + 2\theta \int_a^b f(x)g(x) \, dx + \theta^2 \int_a^b (g(x))^2 \, dx. \tag{7.1.20}$$

Le membre de droite de (7.1.20) est un trinôme du second degré en θ qui est toujours non négatif et donc son discriminant est négatif ou nul ce qui donne :

$$\left(2\int_a^b f(x)g(x) \, dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b (f(x))^2 \, dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2 \, dx\right) \leq 0$$

soit

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) \, dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 \, dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2 \, dx\right)$$

ce qui est précisément (7.1.19) en prenant la racine carrée des trois termes (qui sont positifs).

Corollaire 7.1.2. *Soient a et b quelconques, f et g deux fonctions définies et continues en tout x compris entre a et b, alors*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) \, dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 \, dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2 \, dx\right)$$

Démonstration -

Pour $a \leq b$, cette inégalité vient d'être démontrée.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Pour $b < a$, en utilisant ce qui précède on obtient :

$$\left(\int_b^a f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_b^a (f(x))^2\,dx\right)\left(\int_b^a (g(x))^2\,dx\right)$$

Or

$$\int_b^a f(x)g(x)\,dx = -\int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

$$\int_b^a (f(x))^2\,dx = -\int_a^b (f(x))^2\,dx,\ \int_b^a (g(x))^2\,dx = -\int_a^b (g(x))^2\,dx.$$

Ce qui permet d'obtenir l'inégalité en remplaçant.

7.1.13 Remarques sur le calcul numérique

Exercices :
Exercice A.1.18

Comme beaucoup d'intégrales ne sont pas calculables de manière exacte, il est souvent nécessaire d'avoir recours au calcul numérique. La méthode la plus simple, que nous avons déjà exposée d'ailleurs, est la méthode des rectangles présentée au chapitre 3 (suites numériques), exemple B.1 (calcul numérique d'une intégrale). Nous allons, dans ce qui suit, donner un calcul d'erreur. On suppose $a < b$, posons

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{7.1.21}$$

$$\text{et} \quad I_h = \sum_{k=0}^{n-1} h\,f(x_k) \tag{7.1.22}$$

$$\text{avec} \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k\,h,\ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{7.1.23}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème 7.1.6. *Soit f une fonction continûment dérivable sur $[a,b]$, alors avec les notations (B.1.1),..., (7.1.23) nous avons l'estimation d'erreur :*

$$|I - I_h| \leq C\,h \tag{7.1.24}$$

avec

$$C = \frac{1}{2}(b-a)\max_{a\leq x\leq b}|f'(x)|.$$

Démonstration - La relation de Chasles donne :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx.$$

Nous avons donc

$$I - I_h = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - h\,f(x_{k-1}).$$

Or

$$h\,f(x_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_{k-1})\,dx,$$

d'où

$$I - I_h = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1}))\,dx,$$

et en passant aux valeurs absolues (propriétés des intégrales)

$$|I - I_h| \leq \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(x_{k-1})|\,dx.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Appliquons le théorème des accroissements finis :

$$f(x) - f(x_{k-1}) = (x - x_{k-1}) f'(c_k)\,,\ \text{où } x_{k-1} < c_k < x\,,$$

et majorons la valeur absolue de cette différence :

$$|f(x) - f(x_{k-1})| \le (x - x_{k-1}) M\,,$$

où

$$M = \max_{a \le x \le b} |f'(x)|.$$

Alors on obtient l'estimation

$$|I - I_h| \le \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1}) M\, dx\,,$$

dans laquelle on peut calculer l'intégrale, soit

$$|I - I_h| \le \sum_{k=1}^{n} M \frac{1}{2} h^2.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} M \frac{1}{2} h^2 = \frac{1}{2} M n h^2 = \frac{1}{2} M (nh) h = \frac{1}{2} M (b-a) h,$$

d'où le résultat final

$$|I - I_h| \le \frac{1}{2} M (b-a) h\,.$$

Remarque 7.1.2. On résume souvent la formule (7.1.24) en disant que la méthode des rectangles fournit une approximation de l'intégrale en $O(h)$, ce qui veut dire que l'erreur est inférieure à un infiniment petit d'ordre 1 en h. On voit donc que la convergence de la méthode des rectangles est médiocre puisque pour avoir une précision de 10^{-k} il faut de l'ordre de 10^k intervalles. On peut améliorer très simplement la méthode précédente en utilisant la **méthode des trapèzes** qui consiste à approcher l'intégrale

$$\int_0^h f(x)\,dx \quad \text{par} \quad \frac{h}{2}\,[f(0)+f(h)].$$

Nous verrons au chapitre 9 que la méthode des trapèzes fournit une approximation bien meilleure puisqu'elle est en $O(h^2)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.2 Calcul d'intégrales

7.2.1 Orientation

Exercices :
Exercice A.1.19

Il ressort du théorème (7.1.2) que le calcul d'une intégrale se ramène à un calcul de primitive puisque

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive quelconque de f.

Déterminer une primitive nécessite de lire 'à l'envers' le tableau des dérivées usuelles : par exemple

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arc}\sin b - \operatorname{Arc}\sin a, \quad \text{avec} \quad a, b \in]-1,+1[.$$

La recherche de primitives est en général difficile et il n'y a qu'un nombre limité de fonctions dont on on puisse expliciter une primitive à l'aide de "fonctions connues". évidemment, et nous le ferons par la suite, on peut toujours donner un "nom" à une primitive mais cela ne résout pas le problème de son calcul explicite. Par exemple une primitive (celle qui tend vers 0 quand $x \to -\infty$) de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ est notée $\operatorname{erf}(x)$ mais on ne peut calculer sa valeur que par des tables (ce qui est le cas pour la quasi totalité des fonctions usuelles).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ce qui suit a donc pour objet de se ramener à des fonctions dont on connaî t les primitives. On utilise en général la notation

$$\int f(x)\,dx$$

pour représenter une primitive quelconque de f. Si F est un primitive de f on peut donc écrire

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

7.2.2 Intégration par parties

Exercices :
Exercice A.1.20

Théorème 7.2.1. *Soient u, v deux fonctions continûment dérivables sur l'intervalle $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx,$$

avec la notation

$$[g]_a^b \overset{\text{Déf}}{=} g(b) - g(a).$$

Démonstration - Cela résulte de la relation

$$(uv)'(x) = v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$$

qui intégrée donne

$$[uv]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple 7.2.1. Pour calculer

$$\int_a^b x \cos x \, dx$$

on prend

$$\begin{cases} u'(x) = \cos x, \\ v(x) = x, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} u(x) = \sin x, \\ v'(x) = 1, \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\int_a^b x \cos x \, dx = [x \sin x]_a^b - \int_a^b \sin x \, dx = b \sin b - a \sin a + \cos b - \cos a.$$

Remarque 7.2.1. La formule d'intégration par parties s'écrit, en notation d'intégrale "indéfinie" :

$$\int u'(x) v(x) \, dx = u(x) v(x) - \int u(x) v'(x) \, dx + C.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.2.3 Changement de variable

Exercices :
Exercice A.1.21

De façon à introduire la méthode commençons par un exemple.

Exemple 7.2.2. On veut calculer

$$\int_a^b x \cos x^2 \, dx. \tag{7.2.1}$$

Comme nous connaissons les primitives de la fonction $f(t) = \cos t$, nous pouvons nous ramener à cette situation en posant

$$t = \varphi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x^2$$

Nous remarquons alors que l'intégrant de (7.5.1) est de la forme

$$\frac{1}{2} f(\varphi(x))\, \varphi'(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} F(\varphi(x)),$$

avec F primitive de f et donc

$$\int_a^b \frac{1}{2} \frac{d}{dx} F(\varphi(x))\, dx = \frac{1}{2} \big(F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \big).$$

Prenons par exemple

$$F(t) = \sin t,$$

nous obtenons ainsi le résultat

$$\int_a^b x\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}(\sin(b^2)-\sin(a^2)) = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\cos t\,dt.$$

Principe de la méthode.

Si φ est une fonction continûment dérivable sur l'intervalle (a,b), si f est une fonction continue sur l'image par φ de (a,b) , si on note F une primitive de f, alors :

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left[F(\varphi(x))\right]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

On a donc

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Pour passer d'une intégrale à l'autre on effectue ce que l'on appelle un changement de variable, ce changement s'effectue en 3 étapes :

1. on pose $t=\varphi(x)$,
2. on pose $dt = \varphi'(x)dx$,
3. on change les bornes, quand $x=a$, $t=\varphi(a)$, quand $x=b$, $t=\varphi(b)$.

Théorème 7.2.2. *Soit φ est une fonction continûment dérivable sur l'intervalle (a,b), soit f est une fonction continue sur l'image par φ de (a,b), alors on a la formule de* ***changement de variable*** *:*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt. \tag{7.2.2}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Nous allons voir un autre exemple.

Exemple 7.2.3. On veut calculer l'intégrale

$$I = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx \quad \text{avec} \quad -|r| < a < b < +|r|,$$

Si $r^2 = 1$, on sait calculer cette intégrale car une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\operatorname{Arc\,sin} x$. On va esssayer de se ramener à ce cas, pour cela écrivons

$$I = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = \int_a^b \frac{1}{|r|\sqrt{1-\left(\frac{x}{|r|}\right)^2}}\, dx,$$

puis posons

$$t = \varphi(x) = \frac{x}{|r|}, dt = \frac{dx}{|r|}$$

Pour $x = a,\ t = \frac{a}{|r|}$, pour $x = b,\ t = \frac{b}{|r|}$ ce qui permet de récrire I sous la forme

$$I = \int_a^b \frac{1}{|r|\sqrt{1-\left(\frac{x}{|r|}\right)^2}}\, dx = \int_{\frac{a}{|r|}}^{\frac{b}{|r|}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \operatorname{Arc\,sin} \frac{b}{|r|} - \operatorname{Arc\,sin} \frac{a}{|r|}.$$

Sous les hypothèses du théorème (7.2.2), on a vu l'égalité (7.5.3), dans les exemples traités, nous avons calculé $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt$. pour en déduire $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx$. Le théorème peut servir "dans l'autre sens", on calcule $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx$ pour en déduire $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt$. Voici un exemple

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

de ce cas, on veut calculer $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt$, on pose $t=\sin x, dt=\cos x dx$, pour avoir $t=-1$, on peut choisir $x=-\frac{\pi}{2}$, pour avoir $t=1$, on peut choisir $x=\frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 x}\cos x dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|\cos x dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\frac{\pi}{2}$$

7.3 Fonctions logarithme et exponentielle

7.3.1 Fonction logarithme népérien.

Exercices :
Exercice A.1.22
Exercice A.1.23

Définition 7.3.1. *On appelle* ***logarithme népérien*** *et on note* $\boldsymbol{x} \mapsto \ln \boldsymbol{x}$ *la primitive de la fonction* $f(x) = 1/x$ *qui s'annule en* $x = 1$*, soit :*

$$\ln \boldsymbol{x} = \int_1^{\boldsymbol{x}} \frac{\boldsymbol{d t}}{\boldsymbol{t}}, \quad \boldsymbol{x} > \mathbf{0}. \tag{7.3.1}$$

La fonction $\ln(.)$ est donc définie et continûment dérivable sur $]0, \infty[$ et par construction $(\ln x)' = 1/x$.

Théorème 7.3.1. *La fonction* $\ln(.)$ *vérifie la propriété fondamentale suivante*

$$\forall a, b > 0, \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b. \tag{7.3.2}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - Il suffit de considérer les fonctions

$$g(x) = \ln(ax) \quad \text{et} \quad h(x) = \ln a + \ln x.$$

On a

$$g'(x) = a\frac{1}{ax} = \frac{1}{x} = h'(x)$$

de sorte que g et h ayant les mêmes dérivées, ne diffèrent que par une constante :

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x + C.$$

Or pour $x = 1$ nous avons :

$$\ln(a) = \ln a + C$$

d'où $C = 0$.

Remarque 7.3.1. La propriété (7.3.2) est une **propriété fonctionnelle**. Posons nous le problème suivant : trouver toutes les fonctions dérivables sur $]0, \infty[$ qui sont solutions de l'équation fonctionnelle

$$\forall a, b > 0, \quad f(ab) = f(a) + f(b). \tag{7.3.3}$$

Une telle fonction doit donc vérifier

$$\forall x > 0, \quad f(ax) = f(a) + f(x),$$

ce qui implique, comme f est dérivable, que

$$af'(ax) = f'(x). \tag{7.3.4}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En prenant $x = 1$ dans (7.3.4) on déduit

$$a f'(a) = f'(1).$$

Posons $\gamma = f'(1)$, alors f vérifie, pour tout a positif la relation

$$f'(a) = \frac{\gamma}{a}$$

d'où

$$f(x) = \gamma \ln x + C. \tag{7.3.5}$$

Il reste à vérifier que f donnée par (7.3.5) vérifie (7.3.3) :

$$\gamma \ln(ab) + C = \gamma \ln a + C + \gamma \ln b + C$$

ce qui implique $C = 0$. Finalement donc, les seules solutions sont :

$$f(x) = \gamma \ln x.$$

Corollaire 7.3.1. *La fonction logarithme népérien possède les propriétés suivantes :*

- *(i)* $\forall a, b > 0, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b,$
- *(ii)* $\forall a_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n, \quad \ln(\prod_{i=1}^{n} a_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i,$
- *(iii)* $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall a > 0, \quad \ln(a^p) = p \ln a,$
- *(iv)* $\forall p \in \mathbb{Z},\ \forall a > 0, \quad \ln(a^p) = p \ln a,$
- *(v)* $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ \forall a > 0, \quad \ln(a^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q} \ln a,$
- *(vi)* $\forall x \in \mathbb{Q},\ \forall a > 0, \quad \ln(a^x) = x \ln a,$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - à faire en exercice.

Variations de la fonction $\ln x$

La fonction $\ln x$ est strictement monotone croissante sur $]0,\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il résulte de ses propriétés fonctionnelles que

— $\ln x \to \infty$ quand $x \to \infty$,
— $\ln x \to -\infty$ quand $x \to 0$, $(x > 0)$.

En effet si $x \geq 10^n$ alors d'après la monotonie

$$\ln x \geq n \ln 10,$$

ce qui montre la première propriété, la seconde résultant du fait que

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x.$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$(\ln x)'$		$+$		$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de la fonction ln est donné par la figure (7.3.5).

Théorème 7.3.2. *La fonction logarithme népérien possède la propriété suivante :*

$$\frac{\ln x}{x} \to 0 \quad \textit{quand} \quad x \to +\infty.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - Pour $t > 1$ on a

$$\sqrt{t} < t \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

On en déduit que pour $x > 1$ on a

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2(\sqrt{x} - 1) < 2\sqrt{x}.$$

On a donc

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}},$$

ce qui montre le résultat cherché.

Corollaire 7.3.2. *Pour m entier strictement positif et p entier quelconques on a*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^m} = 0.$$

Démonstration - Tout d'abord, si $p \leq 0$, l'expression n'est pas indéterminée, le résultat est immédiat, on suppose maintenant que $p > 0$. écrivons

$$\frac{(\ln x)^p}{x^m} = \left(\frac{\ln x}{x^{m/p}}\right)^p$$

et posons $x^{m/p} = y$. Alors le rapport à étudier s'écrit

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\left(\frac{p}{m}\right)^p \left(\frac{\ln y}{y}\right)^p$$

et il suffit d'appliquer le théorème (7.3.2).

Corollaire 7.3.3. *Pour m entier strictement positif et p entier quelconques on a*

$$\lim_{x \to 0^+} x^m (\ln x)^p = 0.$$

Démonstration - Il suffit de poser $z = \frac{1}{x}$ est on est ramené au corollaire (7.3.2).

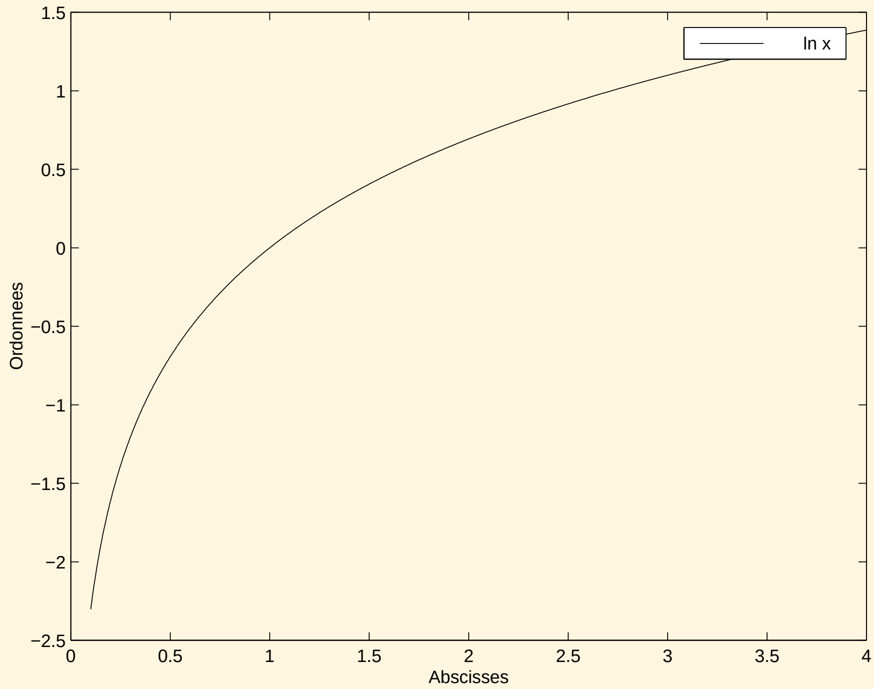


FIGURE 7.3.5 – Graphe de la fonction logarithme népérien

7.3.2 Fonction exponentielle de base e

Exercices :
Exercice A.1.24

Définition 7.3.2. *La fonction* $f(x) = \ln x$ *étant strictement monotone sur* $]0,\infty[$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, admet une fonction réciproque notée*

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) = \exp x}$$

définie sur $\mathbb{R}$ *qui est appelée* ***fonction exponentielle à base e*** . *On a donc*

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp y \quad (x > 0,\ y \in \mathbb{R}).$$

Proposition 7.3.1. *On a*

$$\exp(x + x') = (\exp x)(\exp x'). \tag{7.3.6}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En effet si l'on pose $z = (\exp x)(\exp x')$, alors

$$\ln z = \ln(\exp x) + \ln(\exp x') = x + x'$$

et donc, de manière équivalente,

$$z = \exp(x + x').$$

Corollaire 7.3.4.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ \exp(nx) = (\exp x)^n$
2. $\forall q \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \ \exp(\frac{x}{q}) = (\exp x)^{\frac{1}{q}}$
3. $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \ \exp(\frac{p}{q}x) = (\exp x)^{\frac{p}{q}}$

La démonstration est immédiate en utilisant le logarithme.

Définition 7.3.3. *On définit le nombre e par*

$$\ln e = 1, \ \textit{donc}\ e = \exp 1$$

sa valeur approchée est $e = 2.718\ldots$.

En appliquant le corollaire précédent, on a donc

$$\forall y \in \mathbb{Q}, \ \exp y = \exp(y \times 1) = (\exp 1)^y = e^y$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

d'où la notation de l'exponentielle

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp x = e^x$$

Cette notation est une extension à $\mathbb{R}$ de l'égalité que l'on a démontrée sur $\mathbb{Q}$.

En effet les expressions $e^2 = e \times e$, $e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$ peuvent être définies sans faire référence à la fonction exponentielle, mais on a démontré que

$e^2 = \exp 2$, $e^{\frac{2}{3}} = \exp(\frac{2}{3})$. Par contre la seule définition de e^π est $e^\pi = \exp \pi$.

étude succincte de la fonction e^x.

On a

$$(e^x)' = e^x. \tag{7.3.7}$$

En effet, si on note,un instant

$$f(x) = \ln x, \quad g(y) = e^y, \quad y_0 = \ln x_0, \quad x_0 = e^{y_0},$$

alors

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0 = g(y_0) = e^{y_0}.$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, la fonction e^x est strictement monotone croissante sur $\mathbb{R}$ et on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(\exp x)'$		$+$		$+$	
$\exp x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de la fonction exponentielle est donné par la figure (7.3.6).

Théorème 7.3.3. *Pour tout entier p on a*

$$\frac{e^x}{x^p} \to +\infty \quad \textit{quand} \quad x \to +\infty.$$

Démonstration - Il suffit de poser $x = \ln y$, ce qui conduit à étudier, quand $y \to +\infty$, le rapport

$$\frac{y}{(\ln y)^p}.$$

D'après le corollaire (7.3.2) on sait que

$$\frac{y}{(\ln y)^p} \to +\infty \quad \text{quand} \quad y \to +\infty,$$

d'où le résultat.

Théorème 7.3.4. *Pour tout entier p on a*

$$\lim_{x \to -\infty} (x)^p\, e^x = 0.$$

Démonstration - On pose $x = \ln y$ et on doit étudier, quand $y \to 0$, le comportement de

$$y\,(\ln y)^p.$$

Le résultat est une conséquence directe du corollaire (7.3.3).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

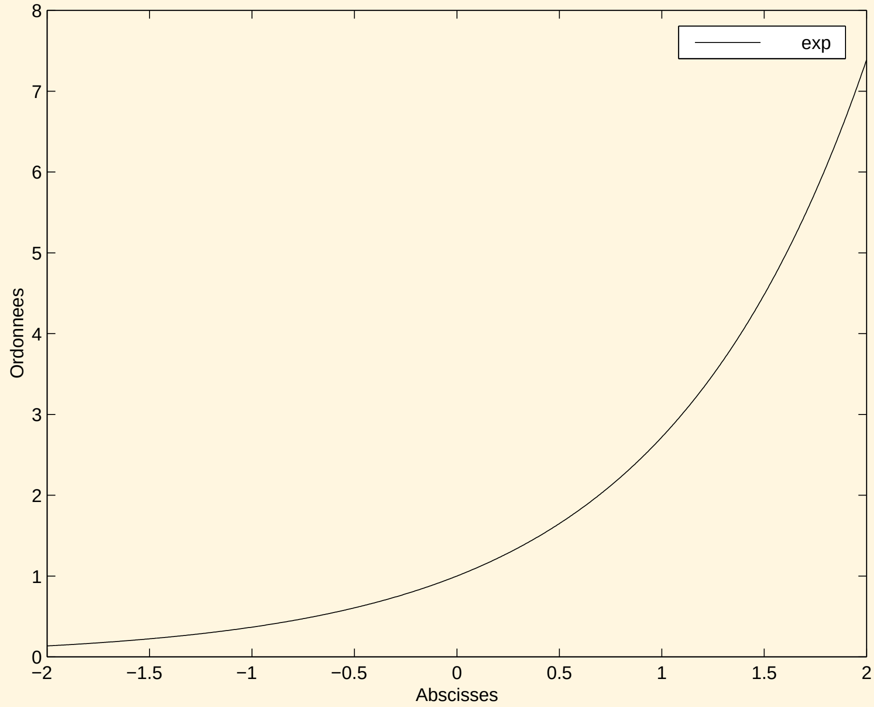


FIGURE 7.3.6 – Graphe de la fonction exponentielle

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.4 Fonctions hyperboliques

7.4.1 Fonctions hyperboliques directes

Exercices :
Exercice A.1.25

Définition 7.4.1. *On appelle **fonctions hyperboliques** les fonctions définies ci-dessous sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\mathbf{ch}\,\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{e^x + e^{-x}}}{\mathbf{2}}, \quad \mathbf{sh}\,\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{e^x - e^{-x}}}{\mathbf{2}}, \quad \mathbf{th}\,\boldsymbol{x} = \frac{\mathrm{sh}\,\boldsymbol{x}}{\mathrm{ch}\,\boldsymbol{x}}, \quad \mathbf{coth}\,\boldsymbol{x} = \frac{\mathrm{ch}\,\boldsymbol{x}}{\mathrm{sh}\,\boldsymbol{x}},$$

où la fonction coth *n'est définie que pour tout* $x \neq 0$.

Nota. Ces fonctions sont également notées respectivement **cosh, sinh** et **tanh, cotanh**.

Remarque 7.4.1. Les fonctions hyperboliques et leurs réciproques, que nous allons définir au paragraphe suivant, sont utilisées pour simplifier certains calculs et complètent également le 'tableau de primitives'. Elles conduisent en particulier à des formules analogues aux formules de trigonométrie. On utilise d'ailleurs le terme de **formules de trigonométrie hyperbolique**. Le terme de 'fonction hyperbolique' est dû au fait que ces fonction servent, en particulier, à paramétrer les hyperboles d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

dont un paramétrage "naturel" (voir *infra*) est

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

Alors que les fonctions trigonométriques sont classiquement utilisées pour paramétrer les ellipses d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dont un paramétrage "naturel" est

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Propriétés.

La fonction $\operatorname{ch} x$ est paire, les autres étant toutes impaires. Un calcul direct montre que

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \qquad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

Par ailleurs

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x},$$

d'où

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \tanh^2 x.$$

On en déduit

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \tanh^2 x.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On a les tableaux de variation suivants (comme les fonctions sont ou paires, ou impaires il suffit de les étudier sur $[0,+\infty[$) :

x	0		$+\infty$
$\cosh x$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$\sinh x$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\tanh x$	0	$\nearrow$	$+1$
$\operatorname{cotanh} x$	$+\infty$	$\searrow$	$+1$

Les graphes des fonctions ch, sh et th sont donnés par la figure (7.4.7).

Formules de trigonométrie hyperbolique. Il résulte des définitions un nombre important de formules, analogues à celles de la trigonométrie classique. Donnons en quelques exemples :

$$\mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b, \qquad \mathrm{sh}\,(a+b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b,$$

$$\mathrm{th}\,(a+b) = \frac{\mathrm{th}\,a + \mathrm{th}\,b}{1+\mathrm{th}\,a\,\mathrm{th}\,b}, \quad \mathrm{ch}\,2a = \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a, \quad \mathrm{sh}\,2a = 2\,\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,a.$$

Fonctions hyperboliques directes

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

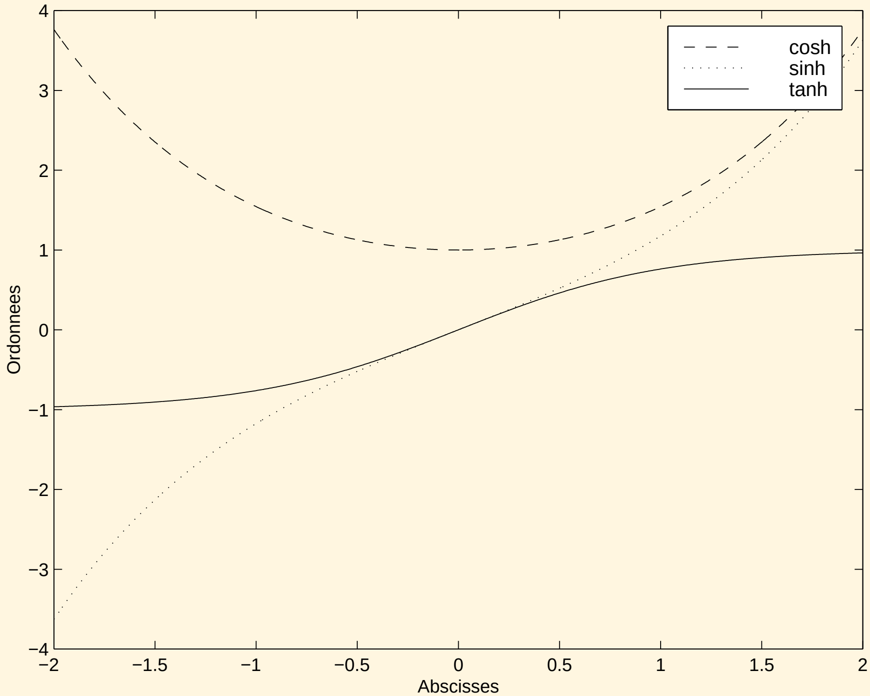


FIGURE 7.4.7 – Graphes des fonctions ch, sh et th

7.4.2 Fonction réciproque du sinus hyperbolique.

Fonction réciproque de $\operatorname{sh} x$.

La fonction $f(x) = \operatorname{sh} x$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ (car $f'(x) = \operatorname{ch} x > 0$) et a comme image $\mathbb{R}$ tout entier, on peut donc définir f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

Définition 7.4.2. *On appelle* $\operatorname{Arg sh} x$ *la fonction réciproque de* $\operatorname{sh} x$. *On a donc*

$$\operatorname{Arg sh} x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad \textit{avec} \quad (x = \operatorname{sh} y) \Leftrightarrow (y = \operatorname{Arg sh} x).$$

On peut donner une expression de $\operatorname{Arg sh} x$ à l'aide d'un logarithme. En effet on a

$$(y = \operatorname{Arg sh} x) \Rightarrow (\operatorname{sh} y = x) \Rightarrow (\operatorname{ch} y = \sqrt{1+x^2})$$

et donc

$$e^y = x + \sqrt{1+x^2}$$

d'où la formule, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Arg sh} \boldsymbol{x} = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x} + \sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{x}^2}).$$

(on notera que $x + \sqrt{1+x^2} > 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$).

Dérivée de $\operatorname{Arg sh} x$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En utilisant toujours les mêmes notations :

$$y = f(x) = \operatorname{sh} x, \quad g(y) = \operatorname{Arg\,sh} y = x, \quad y_0 = \operatorname{sh} x_0, \quad x_0 = \operatorname{Arg\,sh} y_0,$$

alors

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\operatorname{ch} x_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+y_0^2}},$$

où nous avons utilisé au passage la relation $\operatorname{ch}^2 x_0 - \operatorname{sh}^2 x_0 = 1$, en remarquant que $\operatorname{ch} x_0 > 0$. Nous avons ainsi établi la formule :

$$(\operatorname{Arg\,sh} \boldsymbol{x})' = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}.$$

7.4.3 Fonction réciproque du cosinus hyperbolique.

Documents :
Document C.1.6

Fonction réciproque de $\operatorname{ch} \boldsymbol{x}$.

La fonction $f(x) = \operatorname{ch} x$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$, par contre cette fonction considérée comme une application de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$ est strictement monotone croissante et est bijective. On peut donc définir sa fonction réciproque.

Définition 7.4.3. *On appelle* $\operatorname{Arg}\operatorname{ch} \boldsymbol{x}$ *la fonction définie sur* $[1, +\infty[$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$y = \operatorname{Arg}\operatorname{ch} x \ (x \geq 1) \quad \Leftrightarrow \quad y \geq 0,\ x = \operatorname{ch} y.$$

On peut donner une expression explicite de $\operatorname{Arg}\operatorname{ch} x$ (exercice : reprendre le même calcul que précédemment), pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\operatorname{Arg}\operatorname{ch} \boldsymbol{x} = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x} + \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - 1}).$$

Dérivée de $\operatorname{Arg}\operatorname{ch} \boldsymbol{x}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On utilise encore les mêmes notations

$$y = f(x) = \operatorname{ch} x, \quad g(y) = \operatorname{Arg ch} y = x, \quad y_0 = \operatorname{ch} x_0, \quad x_0 = \operatorname{Arg ch} y_0,$$

alors

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\operatorname{sh} x_0} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x_0 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y_0^2 - 1}},$$

où nous avons utilisé au passage la relation $\operatorname{ch}^2 x_0 - \operatorname{sh}^2 x_0 = 1$, en remarquant que $\operatorname{sh} x_0 \geq 0$ puisque $x_0 \geq 0$

Nous avons ainsi établi la formule, pour $x > 1$:

$$(\operatorname{Arg ch} \boldsymbol{x})' = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{1}}}$$

Vous pouvez consulter en document la fonction réciproque de la tangente hyperbolique.

7.4.4 Fonctions logarithme et exponentielle à base quelconque

Exercices :
Exercice A.1.26
Exercice A.1.27

Définition 7.4.4. *Pour $a \in]0,+\infty[$ on définit la* ***fonction exponentielle de base a*** *par :*

$$\boldsymbol{a^x = e^{x \ln a},} \tag{7.4.1}$$

fonction qui est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Proposition 7.4.1. *La fonction $f(x) = a^x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée d'ordre k étant donnée par :*

$$\frac{d^k}{dx^k} a^x = (\ln a)^k a^x. \tag{7.4.2}$$

Elle est strictement monotone croissante pour $a > 1$ et décroissante pour $a < 1$.

Démonstration - immédiate.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition 7.4.5. *Pour $a \in]0,+\infty[$, $a \neq 1$, on appelle* ***fonction logarithme de base a*** *et on note* $\mathbf{log_a}$ *la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *comme la fonction réciproque de* a^x*. On a donc*

$$(y = \log_a x) \Leftrightarrow (x = a^y), \quad (x > 0).$$

Le cas particulier $a = 10$ est appelé ***logarithme décimal*** *et est noté :*

$$\mathbf{\log x \overset{\text{déf}}{=} \log_{10} x.}$$

Proposition 7.4.2. *On a*

$$\ln x = \ln a \log_a x$$

Démonstration - On a la suite d'équivalences :

$$(y = \log_a x) \Leftrightarrow (x = e^{y \ln a}) \Leftrightarrow (\ln x = y \ln a) \Leftrightarrow (\ln x = (\log_a x)(\ln a)).$$

Théorème 7.4.1. *Soient a et b deux réels de l'intervalle $]0,+\infty[$, $a \neq 1$ et $b \neq 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a*

$$\log_a x = \log_a b \log_b x.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - Il suffit d'utiliser la proposition précédente. On a

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}, \quad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

et donc

$$\log_a b \log_b x = \frac{\ln b}{\ln a}\frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\ln x}{\ln a} = \log_a x.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.5 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.5.1 Équation différentielle homogène

Exercices :
Exercice A.1.28
Exercice A.1.29

Exemples :
Exemple B.1.1

Documents :
Document C.1.7

Soit à résoudre l'équation

$$y'(x) = a(x)y(x), \qquad x \in I. \tag{7.5.1}$$

où $a(.)$ est un fonction continue sur l'intervalle I. On note $A(.)$ une primitive quelconque de $a(.)$. Comme la fonction $e^{-A(x)}$ ne s'annule jamais l'équation (7.5.1) est équivalente à

$$y'(x)e^{-A(x)} = a(x)e^{-A(x)}y(x) = A'(x)e^{-A(x)}y(x)$$

soit

$$y'(x)e^{-A(x)} - A'(x)e^{-A(x)}y(x) = 0$$

ou encore

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)e^{-A(x)}\right] = 0. \tag{7.5.2}$$

L'équation (7.5.2) admet alors comme seules solutions

$$y(x)e^{-A(x)} = C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

d'où le résultat suivant

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 7.5.1. *Soit $a : I \mapsto \mathbb{R}$ un fonction continue, alors l'équation différentielle*

$$y'(x) = a(x)y(x), \qquad x \in I,$$

admet pour solution générale

$$y(x) = Ce^{A(x)}, \tag{7.5.3}$$

où $A(.)$ est une primitive arbitraire de $a(.)$ et C est une constante réelle quelconque.

Proposition 7.5.2. *Le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{7.5.4}$$

admet comme unique solution

$$y(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)} = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right). \tag{7.5.5}$$

La démonstration est à faire en exercice. Il en résulte que si une solution est nulle en un point, elle est identiquement nulle.

Par exemple, pour $k \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle à coefficients constants

$$y'(x) + ky(x) = 0$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

a pour solutions les fonctions de la forme

$$y(x) = Ce^{-kx},\ C \in \mathbb{R}.$$

Un autre exemple, moins trivial, est donné en exemple référencé. Vous trouverez, dans le document référencé, le concept de stabilité qui correspond au comportement des solutions quand x tend vers l'infini.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.5.2 Résolution de l'équation non homogène

Exercices :
Exercice A.1.30
Exercice A.1.31

Proposition 7.5.3. *La solution générale de l'équation avec second membre*

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x), \;\; x \in I. \tag{7.5.6}$$

où a et b sont deux fonctions continues données sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ *est de la forme :*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

où y_p *est une solution particulière de (7.5.6) et* y_h *est la solution générale de l'équation homogène (7.5.1) :*

$$y_h'(x) = a(x)y_h(x).$$

Démonstration -

En multipliant (7.5.6) par $e^{-A(x)}$, où A est une primitive quelconque de a, on obtient :

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)e^{-A(x)}\right] = b(x)e^{-A(x)}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

et donc si $S(x)$ est une primitive particulière de $b(x)e^{-A(x)}$, les solutions sont de la forme :

$$y(x) = (S(x) + C)e^{A(x)}, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{7.5.7}$$

On retrouve $y_h(x) = Ce^{A(x)}$ qui est la solution générale de l'équation homogène (7.5.1)

Il reste à montrer que $y_p(x) = S(x)e^{A(x)}$ est une solution particulière de (7.5.6), on a en effet :

$$y'_p(x) = (S'(x) + a(x)S(x))e^{A(x)} = (b(x)e^{-A(x)} + a(x)S(x))e^{A(x)} = b(x) + a(x)y_p(x)$$

La méthode générale de résolution se décompose donc en deux phases :

— (i) résolution de l'équation homogène $y'_h(x) = a(x)y_h(x)$,

— (ii) recherche d'une solution particulière y_p.

7.5.3 Méthode de variation de la constante

Exercices :
Exercice A.1.32
Exercice A.1.33

Dans le cas général, la **méthode de variation de la constante** permet de calculer une solution particulière. On commence par résoudre l'équation homogène dont les solutions sont de la forme

$$y_h(x) = Ce^{A(x)}.$$

La méthode consiste alors à remplacer C par une fonction de x notée $\varphi(x)$ et on cherche la solution de l'équation avec second membre sous la forme

$$y_p(x) = \varphi(x)e^{A(x)}.$$

En reportant dans l'équation on trouve

$$\varphi'(x)e^{A(x)} + \varphi(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)\varphi(x)e^{A(x)} + b(x),$$

soit, après simplification,

$$\varphi'(x)e^{A(x)} = b(x).$$

On obtient ainsi une solution particulière

$$y_p(x) = \varphi(x)e^{A(x)}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

où $\varphi(x)$ est une primitive particulière de $b(x)e^{-A(x)}$

On retrouve ainsi "naturellement" $\varphi(x) = S(x)$, primitive de $b(x)e^{-A(x)}$. La solution générale est donc

$$y(x) = Ce^{A(x)} + \varphi(x)e^{A(x)} = (\varphi(x) + C)e^{A(x)}.$$

Cette dernière égalité montre que si l'on considère toutes les primitives de $b(x)e^{-A(x)}$, on obtient alors la solution générale directement.

Proposition 7.5.4. *Soit a un nombre réel. L'unique solution de*

$$\begin{cases} y'(x) = ay(x) + b(x), & x \in I \\ y(x_0) = y_0, & \end{cases}$$

où b est une fonction continue sur l'intervalle I et x_0 est donné dans I, est

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{a(x-t)} b(t)\, dt. \tag{7.5.8}$$

Démonstration - $\int_{x_0}^{x} b(t)e^{-at}\, dt$ est la primitive de $b(x)e^{-ax}$ qui s'annule pour $x = x_0$, les solutions de $y'(x) = ay(x) + b(x)$ peuvent donc s'écrire

$$y(x) = \left(C + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-at}\, dt\right) e^{ax}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Si on utilise la condition $y(x_0) = y_0$, on obtient

$$y_0 = Ce^{ax_0}$$

d'où le résultat.

7.5.4 Équation différentielle de Bernoulli

Exercices :
Exercice A.1.34

Il s'agit d'équations différentielles particulières de la forme

$$\boldsymbol{y'(x) = a(x)y^{\alpha}(x) + b(x)y(x),} \tag{7.5.9}$$

où α est un réel différent de 0 ou 1. En effet, si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, nous voyons que l'équation est linéaire.

On constate que $y = 0$ est solution particulière de l'équation de Bernoulli, pour obtenir les autres solutions, on fait le changement de fonction inconnue :

$$z(x) = y^{1-\alpha}.$$

En effet si on divise (7.5.9) par y^{α} (en supposant que $y(x) \neq 0$) on aboutit à

$$\frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)} = a(x) + b(x)y^{1-\alpha}(x) \tag{7.5.10}$$

et, comme,

$$z'(x) = (1-\alpha)y'(x)y^{-\alpha}(x),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

l'équation (7.5.10) se récrit

$$\frac{1}{1-\alpha} z'(x) = b(x)z(x) + a(x)$$

ce qui est une équation différentielle linéaire avec second membre.

7.5.5 Equation diffErentielle de Riccati

Exercices :
Exercice A.1.35

Cours :
Equation diffErentielle de Bernoulli

Il s'agit d'une Equation de Bernoulli avec $n = 2$ et avec un second membre, soit :

$$\boldsymbol{y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x).} \tag{7.5.11}$$

On ne sait rEsoudre facilement cette Equation que si on connaî t une solution particulière φ, ce qui permet alors de se ramener à une Equation de type Bernoulli. En effet si on fait le changement de fonction inconnue

$$y(x) = u(x) + \varphi(x)$$

alors, en reportant dans (7.5.11) on obtient :

$$u'(x) + \varphi'(x) = a(x)\left[u^2(x) + 2u(x)\varphi(x) + \varphi^2(x)\right] + b(x)\left[u(x) + \varphi(x)\right] + c(x)$$

soit, comme φ est une solution particulière,

$$u'(x) = a(x)u^2(x) + \left[b(x) + 2a(x)\varphi(x)\right]u(x)$$

ce qui est bien une Equation de type Bernoulli avec $\alpha = 2$.

Remarquons que les équations de type Riccati ont un réel intérêt car on rencontre des équations de ce type dans plusieurs domaines des sciences de l'ingénieur (notamment en automatique).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre 7

Exercice A.1.1 Ch7-Exercice1

Montrer qu'une fonction constante sur $[a, b]$ est étagée.

Retour au cours

Solution

Exercice A.1.2 Ch7-Exercice2

Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \\ 2, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Montrer que cette fonction est étagée en donnant au moins deux subdivisions adaptées.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch7-Exercice3

à l'aide de la définition de l'intégrale des fonctions étagées, calculer $\int_a^b m\,dt$ (où m est un réel donné) et $\int_0^2 f(t)\,dt$ où $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \\ 2, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch7-Exercice4

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est nulle sauf en un nombre fini de points. Montrer que $\int_a^b f(t)\,dt = 0$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch7-Exercice5

Soient f une fonction étagée et λ un réel. Montrer, en utilisant la définition, que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch7-Exercice6

Montrer que si deux fonctions étagées diffèrent en un nombre fini de points sur un intervalle $[a, b]$ elles ont la même intégrale sur cet intervalle.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch7-Exercice7

Montrer qu'une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$ est bornée.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch7-Exercice8

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et u et U deux fonctions étagées telles que $u \leq f \leq U$. Déduire de la définition de l'intégrale de f que

$$\int_a^b u(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b U(t)\,dt.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch7-Exercice9

Démontrer la relation de Chasles pour les fonctions intégrables. (on s'inspirera de la démonstration de cette propriété pour les fonctions étagées.)

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch7-Exercice10

Soit la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\frac{1}{2}x \leq f(x) \leq 2x$, $\forall x \in [0,1]$. Donner un encadrement pour $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch7-Exercice11

Soit une fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \\ 2, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Cette fonction est-elle intégrable sur $[0,2]$? Calculer alors son intégrale.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch7-Exercice12

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$. Par quelle intégrale peut-on calculer l'aire comprise entre l'axe des x et le graphe de f ?

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch7-Exercice13

Soit la fonction f définie par $f(x) = 0$ sur $[0,1[\cup]1,2]$ et $f(1) = 1$. Cette fonction est-elle nulle sur $[0,2]$? Que vaut $\int_0^2 f(x)\,dx$? Nous avons pourtant démontré que "si l'intégrale d'une fonction positive est nulle, cette fonction est nulle". Où est la contradiction ?

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch7-Exercice14

Montrer en reprenant la démonstration de la proposition (7.1.7) que, pour $h < 0$, on a

$$\lim_{\substack{h \to 0, \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)\, dx = f(a).$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch7-Exercice15

Calculer $\int_0^x t^2\,dt$, $\int_1^x t^2\,dt$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch7-Exercice16

Appliquer le premier théorème de la moyenne à $\int_0^\pi \sin x \, dx$. Appliquer le deuxième théorème de la moyenne à $\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx$, où f est une fonction continue sur $[0, \pi]$ donnée.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch7-Exercice17

Donner l'inégalité de Cauchy-Schwartz lorsque la fonction f est constante ($f(x) = \alpha, \forall x \in [a, b]$).

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch7-Exercice18

1. On suppose f croissante sur un intervalle $[a,b]$, on définit $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, en s'inspirant du document C.1.5 sur l'intégrabilité des fonctions monotones, donner deux fonctions étagées s_n et S_n telles $s_n \le f \le S_n$.
2. Calculer
$$\int_a^b s_n(x)dx, \int_a^b S_n(x)dx, \int_a^b (S_n(x) - s_n(x))dx$$
3. En déduire une majoration de l'erreur correspondante.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch7-Exercice19

En se servant du théorème fondamental de l'analyse calculer les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx, \quad \int_0^1 x^n \, dx, \quad \int_0^1 x\sqrt{x} \, dx, \quad \int_1^e \frac{1}{x} \, dx.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20 Ch7-Exercice20

Calculer les intégrales

$$\int_a^b \ln x \, dx, \quad \int_a^b x^2 e^x \, dx$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.21 Ch7-Exercice21

Calculer les intégrales

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx, \quad \int_0^1 \operatorname{Arctan} x\,dx, \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}\,dx.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.22 Ch7-Exercice22

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln|x|$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.23 Ch7-Exercice23

Démontrer le corollaire (7.3.1).

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.24 Ch7-Exercice24

1. Pour x réel positif, p et q entiers, on définit la fonction $x \mapsto x^{1/q}$ comme étant la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^q$. Montrer que

$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = (x^p)^{\frac{1}{q}} \stackrel{\text{Déf}}{=} x^{\frac{p}{q}}$$

2. Montrer que

$$exp(\frac{p}{q}) = e^{\frac{p}{q}}.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.25 Ch7-Exercice25

Soient a et x deux réels.

1. Montrer que
$$\operatorname{ch}(a+x) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} x.$$

2. En déduire par dérivation que
$$\operatorname{sh}(a+x) = \operatorname{ch} a \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} x.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.26 Ch7-Exercice26

Soit a un réel strictement positif, x et y deux réels quelconques, montrer que

$$a^{x+y} = a^x + a^y, \qquad a^{xy} = \left(a^x\right)^y = \left(a^y\right)^x.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.27 Ch7-Exercice27

Récapituler, les extensions successives de la fonction x^α, x étant un réel positif et α étant un entier positif, un entier négatif, un rationnel, un réel.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.28 Ch9-Exercice3

Soit l'équation différentielle $y'(x) = a(x)y(x)$ et soient A et $\hat{A}$ deux primitives de $a(x)$. Donner les solutions en fonction de A puis de $\hat{A}$ et montrer que "changer de primitive revient à changer de constante".

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.29 Ch9-Exercice4

Montrer que l'unique solution de

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

s'écrit

$$y(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)}.$$

En déduire que si une solution de $y'(x) = a(x)y(x)$ s'annule en un point, elle est identiquement nulle.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.30 Ch9-Exercice6

Calculer

$$S(x) = \int e^{-2x} \sin \omega x \, dx.$$

En déduire la solution générale de

$$y'(x) = 2y(x) + \sin \omega x.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.31 Ch9-Exercice7

Donner une solution particulière (évidente) de

$$y'(x)\cos x + y(x)\sin x = 1.$$

En déduire la solution générale de cette équation.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.32 Ch9-Exercice12

Utiliser la méthode de variation de la constante pour résoudre

$$y'(x)\cos x + y(x)\sin x = 1.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.33 Ch9-Exercice13

Calculer, par la méthode de la variation de la constante, une solution particulière de

$$y'(x) = 2y(x) + \sin \omega x.$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.34 Ch9-Exercice15

Soit à résoudre l'équation de Bernoulli

$$x^2 y' + y + y^2 = 0.$$

Quel est le changement de fonction inconnue ? Quelle est l'équation différentielle en z ainsi obtenue ? La résoudre et en déduire y.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.35 Ch9-Exercice16

REsoudre l'équation différentielle de Riccati suivante :

$$y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{1}{x^2}.$$

On vérifiera que $w(x) = \frac{1}{x}$ est une solution particulière.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 TD7-Exercice1

Soit la fonction $f(x) = e^x$, N étant un entier , on pose $h = \frac{1}{N}$.
On définit

- une subdivision de $[0,1]$ par $x_i = ih, 0 \le i \le N$,
- les fonctions étagées
  - $u(x) = e^{x_i}$, pour $x \in [x_i, x_{i+1}[,\ 0 \le i \le N-1$,
  - $U(x) = e^{x_{i+1}}$, pour $x \in [x_i, x_{i+1}[,\ 0 \le i \le N-1$

1. Représenter sur une figure les courbes d'équation :
   $y = f(x),\ \ y = u(x),\ \ y = U(x),\ \ x \in]0,1[.$
   Montrer que $u(x) \le f(x) \le U(x),\ \ \forall x \in]0,1[.$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 u(x)dx,\ \int_0^1 U(x)dx$
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 U(x) - u(x)dx = (e-1)h.$
4. En déduire que f est intégrable sur $[0,1]$.
5. Quelle est la limite quand h tend vers 0 de $\dfrac{e^h - 1}{h}$?
   En déduire $\displaystyle l_1 = \lim_{h\to 0}\int_0^1 u(x)dx, l_2 = \lim_{h\to 0}\int_0^1 U(x)dx.$
6. Montrer que par définition de l'intégrale de f, $\displaystyle l_1 \le \int_0^1 f(x)dx \le l_2.$
   En déduire la valeur (bien connue!) de $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx.$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1
TD7-Exercice1

Question 1	Aide 1			
Question 2	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 3	Aide 1			
Question 4	Aide 1			
Question 5	Aide 1			
Question 6	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4

Exercice A.2.2 TD7-Exercice2

Soit f une fonction intégrable sur I, montrer que

$$\forall a, b \in I, \left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left| \int_a^b |f(t)| dt \right|.$$

Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5 Aide 6

Exercice A.2.3 TD7-Exercice3

Montrer que $1-\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ et, si $a>1$, $\int_1^a e^{-x^2}\,dx \leq \frac{1}{e}-\frac{1}{e^a}$.

Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 TD7-Exercice4

1. Soit f une fonction continue, u et v deux fonctions dérivables. Montrer que la fonction définie par : $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable. Calculer $g'(x)$.
2. Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $c \in \mathbb{R}$, montrer que les fonctions f continues qui vérifient $\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt = c, \forall x \in \mathbb{R}$, sont périodiques de période $2a$.
3. (a) Montrer que l'intervalle d'étude de la fonction $g(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}dt$ peut être restreint à $[0, \pi/2]$.
   (b) Calculer la dérivée de $g(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}dt$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
   (c) Calculer une primitive $F(x)$ de $2x\sin x\cos x$.
   (d) En déduire une espression de $g(x)$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
   (e) Calculer $g(\frac{2\pi}{3})$.
4. (a) Calculer la dérivée des fonctions définies par :
   $f_1(x) = \int_0^{x^3} \sin t dt$, $f_2(x) = \int_0^{x^3} \cos t dt$, $g(x) = \int_x^{x-x^3} \sin t dt$.
   (b) On définit $h(x) = \int_0^{x^3} \sin(x-t)dt$.
      i. Transformer $h(x)$ en utilisant les formules trigonométriques. Calculer $h'(x)$.
      ii. Calculer $h'(x)$ en faisant le changement de variable $u = x - t$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4
TD7-Exercice4

Question 1	Aide 1	Aide 2	
Question 2	Aide 1	Aide 2	
Question 3a	Aide 1	Aide 2	
Question 3b	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 3c	Aide 1	Aide 2	
Question 3d	Aide 1	Aide 2	
Question 3e	Aide 1	Aide 2	
Question 4a	Aide 1		
Question 4(b)i	Aide 1	Aide 2	
Question 4(b)ii	Aide 1	Aide 2	

Exercice A.2.5 TD7-Exercice5

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
2. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que ce résultat est faux si f n'est pas continue.
3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, on suppose que sa valeur moyenne sur $[0, 1]$ vaut $\frac{1}{2}$. Montrer que f a au moins un point fixe.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD7-Exercice6

Déterminer le signe de $\int_{\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 TD7-Exercice7

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ montrer que $\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(t)dt$.

On suppose maintenant que f est dérivable et que sa dérivée est continue, montrer que $(f(b)-f(a))^2 \leq (b-a)\int_a^b f'^2(t)dt$.

Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.8 TD7-Exercice8

Soit f une fonction continue sur $]-1,1[$, calculer la limite quand x tend vers 0 de $x\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t^2}\,dt$.

Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice A.2.9 TD7-Exercice9

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\arctan x \leq x$ et $e^x - 1 \leq x e^x$.
2. En utilisant les théorèmes de la moyenne, montrer que
$\left|\int_0^a \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx\right| \leq a$, $\left|\int_0^a \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx\right| \leq \arctan a$, $\forall a \in \mathbb{R}^+$.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10 TD7-Exercice10

1. Montrer que la fonction $\dfrac{\sin t}{t}$ est intégrable sur tout intervalle $[a,b]$.
2. On définit pour $x \neq 0$, $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt$.

   Montrer F admet une limite quand x tend vers 0.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.11 TD7-Exercice11

1. Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, montrer que $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\cos t}{\ln t} dt$ existe.
2. Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, montrer que

$$\exists c \text{ compris entre } x \text{ et } x^2, F(x) = c\cos c \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t} dt$$

3. Calculer $\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t} dt$.
4. En déduire la limite de $F(x)$ quand x tend vers 1.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5
Question 4 Aide 1 Aide 2

Exercice A.2.12 TD7-Exercice12

On suppose que $a < b$.

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, on définit $f = \lambda g$, où λ est une constante réelle, montrer que
$$\left(\int_a^b (f(t)g(t))dt\right)^2 = \int_a^b (f(t))^2 dt \int_a^b (g(t))^2 dt$$
3. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, on définit
$q(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (f(t) - \lambda g(t))^2 dt.$
On suppose que la fonction g n'est pas identiquement nulle et que l'on a :
$$\left(\int_a^b (f(t)g(t))dt\right)^2 = \int_a^b (f(t))^2 dt \int_a^b (g(t))^2 dt.$$
   (a) En déduire qu'il existe λ_0 tel que $q(\lambda_0) = 0$.
   (b) En déduire que $f(t) = \lambda_0 g(t), \forall t \in [a,b]$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.13 TD7-Exercice13

1. — Rappeler l'expression permettant de calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$ par la méthode des rectangles. On notera n le nombre d'intervalles de discrétisation.
   — Donner un majorant de la valeur absolue de l'erreur commise.
   — Comment choisir n pour que cette erreur soit inférieure à 10^{-2} ?

2. En utilisant la même discrétisation, la méthode dite des trapèzes permet d'approcher $\int_a^b f(t)dt$ par

$$h\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{2}\right).$$

   On montre que si f admet une dérivée seconde bornée sur $[a,b]$ par M_2, alors la valeur absolue de l'erreur commise est inférieure à $\left|\frac{M_2 h^2(b-a)}{12}\right|$
   — Donner l'expression permettant de calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$ par la méthode des trapèzes.
   — Comment choisir n pour que l'erreur soit inférieure à 10^{-2} ?

3. Comparer l'efficacité des 2 méthodes.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 3 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.14 TD7-Exercice14

1. Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.
2. On découpe l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles de longueur égale, on note I_n l'approximation de I par la méthode des rectangles.
   (a) Quelle est l'expression de I_n ?
   (b) Donner une majoration de $|I_n - I|$.
   (c) En déduire la limite de la suite de terme général $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$.
3. (a) Calculer $J_{n+1} = \int_a^1 \frac{1}{x} dx$ avec $a = \frac{1}{n+1}$.
   (b) Montrer que $J_{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.
   (c) En déduire que la suite de terme général $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ est divergente.
4. (a) Pour $a, \alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$, calculer $\int_a^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$.
   (b) Montrer que pour $a = \frac{1}{n+1}$, on a
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \int_a^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$
   (c) En déduire les règles sur les séries de Riemann énoncées au chapitre 3.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.14
TD7-Exercice14

Question 1	Aide 1		
Question 2a	Aide 1	Aide 2	
Question 2b	Aide 1	Aide 2	
Question 2c	Aide 1	Aide 2	
Question 3a	Aide 1		
Question 3b	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 3c	Aide 1	Aide 2	

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.15 TD7-Exercice15

Calculer

1. $I_1 = \int_1^e x^n \ln x dx$. $I_2 = \int_0^1 \arctan x dx$.
2. $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^x dx$. $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^x dx$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.16 TD7-Exercice16

Calculer les primitives suivantes

$$\int \ln x\, dx,\ \int \operatorname{Arc}\tan x\, dx,\ \int \arcsin x\, dx,\ \int (x^2+x+1)e^{2x}\, dx,\ \int x \sin x\, dx,\ \int (\sin x) e^{2x}\, dx.$$

Réponses :

$$x\ln x - x + C,\ \ x\operatorname{Arc}\tan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,\ \ x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\frac{x^2+1}{2}e^{2x} + C,\ \ -x\cos x + \sin x + C,\ \ \frac{1}{5}(-\cos x + 2\sin x)e^{2x} + C$$

Aide 1

Exercice A.2.17 TD7-Exercice17

Soit (I_n) la suite dont les termes sont définis par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Intégrer par parties pour montrer que $nI_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$.
3. Utiliser la formule de Taylor pour montrer que $\forall t > -1, \ln(1+t) \le t$
4. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = \ln 2$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5 Aide 6
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 4 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.18 TD7-Exercice18

Soit f une fonction continûment dérivable sur $[a,b]$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0.$$

Exercice A.2.19 TD7-Exercice19

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x)|$. Montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = 0$$

2. (a) Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la suite de fonction (f_n) définies sur $D = [0, 1]$ par $f_n(x) = xn^{\alpha}e^{-nx}$ converge uniformément sur D vers la fonction identiquement nulle.

   (b) A l'aide d'une intégration par partie, calculer

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

   (c) Commentez les résultats (relativement à la question **1.**) en fonction des valeurs de α.

3. (a) Justifier que la fonction définie sur $D = [0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-nx) & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   converge simplement sur D vers la fonction indentiquement nulle.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

(b) Calculer $\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

(c) Déduire de la question **1.** que la convergence n'est pas uniforme.

4. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $D = [0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{e^{-n} + nx^2}$.

   (a) Justifier que (f_n) converge simplement sur D vers la fonction identiquement nulle.

   (b) Montrer que $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \dfrac{\ln(e^{-n}+n)}{2n} + \dfrac{1}{2}$.

   (c) En déduire que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur D vers la fonction identiquement nulle.

5. Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $D = [0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^3x^3}$.

   Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.20 TD7-Exercice20

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique et de période T.

1. Utiliser la relation de Chasles pour montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$$
est constante égale à $\displaystyle\int_0^T f(t)dt$.
2. Retrouver ce résultat en utilisant l'exercice .

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5 Aide 6
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.21 TD7-Exercice21

Calculer les primitives des fonctions : $\dfrac{t}{1+t^2}$, $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $t^4(1+t^5)^5$, $\dfrac{\ln|t|}{t}$, $\dfrac{t}{1+t^4}$, $\sqrt{\sin t}\cos t$, $\dfrac{\arctan t}{t^2+1}$, $e^t(t^2-1)$, $\ln|t|$, $\arccos t$, $\sin^3 x\cos^2 x$, $\cos^3 x\sin^3 x$, $\cos^2 x$, $\cos^4 x$, $\cos^5 x$, $\dfrac{\sin x}{3-2\sin^2 x}$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.22 TD7-Exercice22

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b]\ f(a+b-x) = f(x)$.

1. Quelle propriété possède la courbe représentative de cette fonction ?
2. On pose $t = a+b-x$, utiliser ce changement de variable pour "transformer" $\int_a^b x f(x) dx$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$

   Réponse : $\frac{\pi^2}{4}$

Question 1	Aide 1	Aide 2	Aide 3				
Question 2	Aide 1	Aide 2					
Question 3	Aide 1						
Question 4	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4	Aide 5	Aide 6	Aide 7

Exercice A.2.23 TD7-Exercice23

Calculer les primitives suivantes à l'aide du changement de variable indiqué, préciser pour quelles valeurs de t ces primitives sont définies :

1.
$$\int \frac{2t}{\sqrt{2t+1}} dt, \; x = \sqrt{2t+1}.$$

2.
$$\int \frac{e^t}{(1+e^t)\sqrt{e^t-1}} dt, \; x = \sqrt{e^t-1}$$

Réponse :

$$\frac{2(t-1)\sqrt{2t+1}}{3} + C, \text{ pour } t > -\frac{1}{2}, \; \sqrt{2}\text{Arctan}\frac{\sqrt{e^t-1}}{\sqrt{2}} + C, \text{ pour } t > 0$$

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5 Aide 6

Exercice A.2.24 TD7-Exercice24

1. Calculer $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{a^2+x^2}dx$, $I_2 = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{1}{x^2+2x+4}dx$,
   $I_3 = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx$, $I_4 = \int_{-1}^1 \frac{2-x}{x^2-x+1}dx$.
2. Calculer les primitives des fonctions $f_5(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$, $f_6(x) = \frac{2-x}{x^2-x+1}$ et retrouver les résultats précédents.

Réponses :

$$I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{1}{a},\ \ I_2 = \frac{\pi}{12\sqrt{3}},\ \ I_3 = \frac{\pi}{\sqrt{3}},\ \ I_4 = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$$

$$F_5(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,\ \ F_6(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\operatorname{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.25 TD7-Exercice25

1. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $I_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx.$
   (b) $I_2 = \int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$
   (c) $I_3 = \int_{1}^{\frac{3}{2}} \sqrt{-x^2+3x-2}\,dx.$
   (d) $I_4 = \int_{1}^{\frac{3}{2}} (-2x+3)\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx.$
   (e) $I_5 = \int_{1}^{\frac{3}{2}} x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx.$

   Réponse :
$$I_1 = +\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{3}, I_2 = \frac{\pi}{4}a|a|, I_3 = \frac{\pi}{16}, I_4 = \frac{1}{12}, I_5 = -\frac{1}{24}+\frac{3\pi}{32}.$$
2. Pour quelles valeurs de x les fonctions suivantes sont-elles définies, on suppose que $a > 0$, déterminer alors leurs primitives et retrouver les résultats précédents.
   (a) $f_1(x) = \sqrt{1+x^2},\ f_2(x) = \sqrt{1-x^2},\ f_3(x) = \sqrt{x^2-1}.$
   (b) $f_4(x) = \sqrt{a^2-x^2}.$
   (c) $f_5(x) = \sqrt{-x^2+3x-2},\ f_6(x) = (2x-3)\sqrt{-x^2+3x-2},\ f_7(x) = x\sqrt{-x^2+3x-2}.$

(d) $f_8(x) = \sqrt{-x^2+2x+6}$.

(e) $f_9(x) = \sqrt{x^2+2x+6}$.

(f) $f_{10}(x) = \sqrt{x^2+2x}$.

Réponses :

$$F_1(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\operatorname{Argsh} x}{2} + C,\ \ F_2(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\operatorname{Arcsin} x}{2} + C \text{ pour } -1 \le x \le 1$$

$$F_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \dfrac{\operatorname{Argch} x}{2} + C & \text{pour } x > 1 \\ \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \dfrac{\operatorname{Argch}(-x)}{2} + C & \text{pour } x < -1 \end{cases},$$

$$F_4(x) = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{x}{a} + C \text{ pour } x \in [-a,a]$$

$$F_5(x) = \frac{2x-3}{4}\sqrt{-x^2+3x-2} + \frac{\operatorname{Arcsin}(2x-3)}{8} + C \text{ pour } x \in [1,2]$$

$$F_6(x) = -\frac{2}{3}(-x^2+3x-2)^{3/2} + C \text{ pour } x \in [1,2]$$

$$F_7(x) = -\frac{1}{3}(-x^2+3x-2)^{3/2} + \frac{3(2x-3)}{8}\sqrt{-x^2+3x-2} + \frac{3}{16}\operatorname{Arcsin}(2x-3) + C,$$

$$F_8(x) = \frac{7}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{x-1}{\sqrt{7}} + \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+6}}{2} + C \text{ pour } x \in [1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}]$$

$$F_9(x) = \frac{5}{2}\operatorname{Argsh}\frac{x+1}{\sqrt{5}} + \frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x+6}}{2} + C,$$

$$F_{10}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}{2} - \dfrac{\operatorname{Arg\,ch}(x+1)}{2} + C & \text{pour } x \geq 0 \\ \dfrac{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}{2} + \dfrac{\operatorname{Arg\,ch}(-x-1)}{2} + C & \text{pour } x \leq -2 \end{cases}$$

Question 1a	Aide 1	Aide 2	Aide 3						
Question 1b	Aide 1	Aide 2	Aide 3						
Question 1c	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4					
Question 1d	Aide 1	Aide 2	Aide 3						
Question 1e	Aide 1	Aide 2	Aide 3						
Question 2a	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4	Aide 5	Aide 6	Aide 7	Aide 8	Aide 9
Question 2b	Aide 1								
Question 2c	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4	Aide 5	Aide 6			
Question 2d	Aide 1								
Question 2e	Aide 1								
Question 2f	Aide 1								

Exercice A.2.25
TD7-Exercice25

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.26 TD7-Exercice26

1. Calculer l'aire A_1 du domaine défini par : $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \leq \frac{1}{2}$. Retrouver ce résultat à l'aide d'aires connues.
2. Calculer l'aire A_2 du domaine limité par l'hyperbole d'équation $-x^2 + y^2 = 1$, la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $x = 1$.
3. Calculer l'aire A_3 du domaine limité par l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$, la droite d'équation $x = 2$.

Réponse : $A_1 = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$, $A_2 = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$, $A_3 = 2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$.

Question 1	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4	Aide 5
Question 2	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4	
Question 3	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4	

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.27 TD7-Exercice27

1. Calculer les primitives des fonctions suivantes :
   (a) $\dfrac{1}{\cos x}$, $\dfrac{1}{\sin x}$,
   (b) $\dfrac{1}{2+\cos x}$, $\dfrac{\cos^3 x}{\sin^5 x}$.
2. Même question pour :
   (a) $\tan^2 x$, $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$, $\dfrac{1}{a+\sin x}$ avec $a>1$,
   (b) $\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$, $\dfrac{\cos x}{2+\cos x}$, $\dfrac{1}{\cos^3 x}$, $\dfrac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.28 TD7-Exercice28

Montrer que

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{ch}(\operatorname{Arg}\operatorname{sh} x) = \sqrt{1+x^2} & , & \operatorname{sh}(\operatorname{Arg}\operatorname{ch} x) = \sqrt{x^2-1} \text{ si } x \geq 1 \\ \operatorname{sh}(2\operatorname{Arg}\operatorname{sh} x) = 2x\sqrt{x^2+1} & , & \operatorname{sh}(2\operatorname{Arg}\operatorname{ch} x) = 2x\sqrt{x^2-1} \text{ si } x \geq 1 \\ \operatorname{ch}(2\operatorname{Arg}\operatorname{sh} x) = 2x^2+1 & , & \operatorname{ch}(2\operatorname{Arg}\operatorname{ch} x) = 2x^2-1 \text{ si } x \geq 1 \\ \operatorname{Arg}\operatorname{ch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \text{ si } x \geq 1 & , & \operatorname{Arg}\operatorname{sh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \end{array}$$

Aide 1

Exercice A.2.29 TD7-Exercice29

Déterminer la forme générale des primitives des fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{(x-1)^8(x-2)},\ \frac{3+x}{x^3-x^2+x-1},\ \frac{2}{(x-1)^4(x^2+1)},\ \frac{1}{x^n(x-1)},\ \frac{3x+4}{(x^2+2x+3)^2},\ \frac{\alpha x+\beta}{(x^2-2x+5)^2}$$

Réponses :

$$\int \frac{1}{(x-1)^8(x-2)}dx = \frac{1}{7(x-1)^7}+\ldots+\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\ln\frac{|x-2|}{|x-1|}+C$$

$$\int \frac{3+x}{x^3-x^2+x-1}dx = 2\ln|x-1|-\ln(x^2+1)-\mathrm{Arc}\tan x+C,$$

$$\int \frac{2}{(x-1)^4(x^2+1)}dx = -\frac{1}{3(x-1)^3}+\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2}\mathrm{Arc}\tan x+C,$$

$$\int \frac{1}{x^n(x-1)} = \ln|x-1|-\ln|x|+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{ix^i}+C.$$

$$\int \frac{3x+4}{(x^2+2x+3)^2}dx = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+3}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{x+1}{4(x^2+2x+3)}+C$$

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2-2x+5)^2}dx = -\frac{\alpha}{2}\frac{1}{x^2-2x+5}+\frac{\alpha+\beta}{16}\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{\alpha+\beta}{8}\frac{x-1}{x^2-2x+5}+C$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.30 TD7-Exercice30

1. Calculer une primitive de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1+x^3}$.

   Réponse : $F(x) = \dfrac{\ln|x+1|}{3} - \dfrac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

2. En vous inspirant de la façon dont on a calculé une primitive de $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$, calculer une primitive de $\dfrac{1}{(1+x^3)^2}$

   Réponse : $\frac{2}{3}F(x) + \dfrac{x}{3(1+x^3)}$.

Exercice A.2.31 TD7-Exercice31

1. Calculer
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$$
Réponses : $\frac{1}{4}$, $1-\frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{2}$.
2. On rappelle que
$$\cos x = \frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}, \ \sin x = \frac{2\tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}$$
On pose $t = \tan \frac{x}{2}$, utiliser ce changement de variable pour calculer :
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}, \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$$
Réponses : $\ln(2+\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}\ln 3$, $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.32 TD7-Exercice32

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$2y'(x)+3y(x)=0,\ 2y'(x)+3y(x)=\alpha+\beta x,\ 2y'(x)+3y(x)=e^{4x}$$

   Réponses :

$$y(x)=Ce^{-\frac{3x}{2}},\ y(x)=Ce^{-\frac{3x}{2}}+\frac{\beta}{3}x+\frac{1}{3}\left(\alpha-\frac{2\beta}{3}\right),\ y(x)=Ce^{-\frac{3x}{2}}+\frac{e^{4x}}{11},\ C\in\mathbb{R}$$

2. Dans un circuit LR excité par un courant sinusoïdal, l'intensité du courant est donnée par

$$Li'(t)+Ri(t)=E\sin\omega t$$

   Calculer $i(t)$.

   Réponse : $i(t)=Ce^{-\frac{Rt}{L}}+\frac{ER}{L^2\omega^2+R^2}\sin\omega t-\frac{EL\omega}{L^2\omega^2+R^2}\cos\omega t,\ C\in\mathbb{R}$

3. Résoudre les équations différentielles suivantes, pour chacune d'elles préciser l'intervalle de résolution :

$$xy'(x)-2y(x)=x^3,\ xy'(x)-y(x)=x^2\sin x,\ y'(x)-\frac{y(x)}{x}=x\mathrm{Arc}\tan x$$

$$(2(1-x)+x^2)y(x)+x(1-x)y'(x)=2-2x+x^2,\ 2x^2y'(x)+4xy(x)=-1$$

   Réponses :

$$y(x)=x^3+Cx^2,\ y(x)=Cx-x\cos x,$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$y(x) = x^2 \operatorname{Arctan} x - x \ln \sqrt{1+x^2} + Cx, \;\; y(x) = C\frac{e^x(1-x)}{x^2} + 1, \;\; y(x) = \frac{C}{x^2} - \frac{1}{2x}, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Exercice A.2.32
TD7-Exercice32

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Exercice A.2.33 TD7-Exercice33

Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes après avoir déterminé sur quel intervalle la solution est définie

1. $$y' + \frac{x+2}{x} y = \frac{e^x}{x^2}.$$

2. $$y' + y = \frac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}}.$$

3. $$x y' + (3x+1) y = e^{-3x}.$$

   On prendra le soin de normaliser l'équation différentielle et de prolonger sa solution, si possible, en une solution maximale, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Réponses : C_1, C_2 et C sont des constantes réelles, on obtient :

$$y(x) = C_1 \frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{e^x}{2x^2} \text{ pour } x \in]0, +\infty[, \;\; y(x) = C_2 \frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{e^x}{2x^2} \text{ pour } x \in]-\infty, 0[.$$

$$y(x) = (C + \ln(e^x + e^{-x}))e^{-x}.$$

$$y(x) = C_1 \frac{e^{-3x}}{x} + e^{-3x} \text{ pour } x \in]0, +\infty[, \;\; y(x) = C_2 \frac{e^{-3x}}{x} + e^{-3x} \text{ pour } x \in]-\infty, 0[.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.33
TD7-Exercice33

Question 1	Aide 1	Aide 2	Aide 3		
Question 2	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4	Aide 5
Question 3	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4	Aide 5

Exercice A.2.34 TD7-Exercice34

1. Déterminer les trois réels a, b, c tels que

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$x(x^2-1)\,y' + 2\,y = x^2,\ x \in \mathbb{R}$$

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.35 TD7-Exercice35

On veut résoudre l'équation différentielle d'ordre 1

$$y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2, \; x > 0. \tag{E}$$

1. Déterminer $a > 0$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation différentielle (E) en
$$z' + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z = 1, \; x > 0 \tag{E$_1$}$$
3. Résoudre (E$_1$) et en déduire toutes les solutions de (E).

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.36 TD7-Exercice36

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'(x) + y(x) = x y^2(x).$$

Réponses : $C \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \frac{1}{Ce^x + x + 1}, \text{ ou } y(x) = 0.$$

Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.37 TD7-Exercice37

Résoudre $y'(x) = y^2(x) - \frac{y(x)}{x} - \frac{1}{x^2}$ (vérifier que $w(x) = \frac{1}{x}$ est solution particulière).
Réponses :

$$y(x) = \frac{2x}{-x^2 + C} + \frac{1}{x}, \text{ ou } y(x) = \frac{1}{x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Aide 1

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre 7

Exemple B.1.1 Non unicité de la solution d'une équation différentielle

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{y(x)}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{B.1.1}$$

Cette équation (où $f(x, y) = \sqrt{y}$ est définie, continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$) admet la solution évidente

$$\varphi(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs cette équation admet les solutions suivantes, si C est une constante positive :

$$\begin{cases} \psi(x) = \frac{(x-C)^2}{4} & \text{pour} \quad x \geq C \\ \psi(x) = 0 & \text{pour} \quad x < C \end{cases}$$

On vient donc de voir que le problème (B.1.1) admet plusieurs solutions distinctes φ et ψ, ce qui montre la non unicité de la solution. Mais ici la condition de Cauchy-Lipschitz n'est pas satisfaite.

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre 7

Document C.1.1 Résultat pour les fonctions étagées

Proposition C.1.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction étagée. Si x_0, x_1,…, x_n est une subdivision de I adaptée à f et si l'on pose $f(x) = m_i$, $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[$, alors le nombre $(x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + \cdots + (x_n - x_{n-1})m_n$ ne dépend pas de la subdivision.*

Démonstration - Si l'on ajoute à la subdivision x_0, x_1,…, x_n un point y, compris par exemple entre x_i et x_{i+1}, on obtient la subdivision x_0,…, x_i, y, x_{i+1},…, x_n qui est aussi adaptée pour f puisque $f(x) = m_{i+1}$ si $x \in]x_i, y[$ ou $x \in]y, x_{i+1}[$. D'autre part puisque

$$(y - x_i)m_{i+1} + (x_{i+1} - y)m_{i+1} = (x_{i+1} - x_i)m_i$$

les sommes correspondantes aux deux subdivisions sont égales. De cette manière, on peut montrer par récurrence, que la somme garde sa valeur si l'on rajoute un nombre fini de points à la subdivision initiale.

Supposons maintenant que y_0, y_1,…,y_m soit une autre subdivision adaptée à f et appelons S_x la somme correspondante à la subdivision initiale et S_y la somme correspondante à cette subdivision. L'union des deux subdivisions consiste à rajouter un nombre fini de points à chacune d'entre elles, ce qui ne change pas la somme correspondante et ce qui donne de manière évidente : $S_x = S_y$.

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Somme de fonctions intégrables

Proposition C.1.2. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. La fonction $f+g$ est intégrable et $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.*

Démonstration - Soit $\varepsilon > 0$ donné, puisque les fonctions f et g sont intégrables, il existe des fonctions étagées u, v, U et V telles que

$$u \le f \le U,\ v \le g \le V,\ \int_a^b (U-u)(x)\,dx \le \frac{\varepsilon}{2},\ \int_a^b (V-v)(x)\,dx \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $w = u + v$ et $W = U + V$, ces fonctions w et W sont étagées et

$$w \le f+g \le W,\ \int_a^b (W-w)(x)\,dx = \int_a^b (U-u)(x)\,dx + \int_a^b (V-v)(x)\,dx \le \varepsilon.$$

La fonction $f+g$ est donc intégrable et l'on a de manière évidente

$$\int_a^b w(x)\,dx \le \int_a^b (f+g)(x)\,dx \le \int_a^b W(x)\,dx$$

et

$$\int_a^b u(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b U(x)\,dx + \int_a^b V(x)\,dx.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En "soustrayant" ces inégalités et en remplaçant w et W par leurs valeurs, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)\,dx \quad &+ \quad \int_a^b v(x)\,dx - \int_a^b W(x)\,dx && \text{(C.1.1)}\\ &\le \quad -\int_a^b (f+g)(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx && \text{(C.1.2)}\\ &\le \quad \int_a^b U(x)\,dx + \int_a^b V(x)\,dx - \int_a^b w(x)\,dx && \text{(C.1.3)}\end{aligned}$$

Puisque l'intégrale de la somme est égale à la somme des intégrales pour les fonctions étagées, on peut regrouper les membres de gauche et de droite, ce qui donne, par exemple pour le membre de droite :

$$\int_a^b (U-u)(x)\,dx + \int_a^b (V-v)(x)\,dx \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$$

et de même le membre de gauche est supérieur ou égal à $-\varepsilon$. Il vient donc que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$-\varepsilon \le -\int_a^b (f+g)(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \le \varepsilon$$

ce qui donne

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = 0.$$

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.3 Intégrabilité des fonctions continues

Théorème C.1.1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration - Puisque f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$, elle est uniformément continue, ce qui veut dire

$$\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que} \\ \forall x \in [a,b],\ \forall x_0 \in [a,b], \quad (|x-x_0| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x)-f(x_0| \leq \varepsilon) \end{array}$$

où η ne dépend pas de x_0. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $h = \frac{b-a}{n} \leq 2\eta$ et considérons la subdivision $x_k = a+kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Notons α_k le milieu de chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ et considérons les fonctions étagées u et U telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k = 0, \ldots, n-1,\ \forall x \in [x_k, x_{k+1}[, \\ u(x) = f(\alpha_k) - \varepsilon, \\ U(x) = f(\alpha_k) + \varepsilon. \end{array} \right.$$

Alors, lorsque $x \in [x_k, x_{k+1}[$, nous avons $|x-\alpha_k| \leq \eta$ et donc

$$(u(x) =) f(\alpha_k) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(\alpha_k) + \varepsilon (= U(x))$$

De plus

$$\begin{aligned} \int_a^b (U-u)(x)\,dx &= (x_1-x_0)(f(\alpha_0)+\varepsilon - f(\alpha_0)+\varepsilon) && \text{(C.1.4)} \\ &+ (x_2-x_1)(f(\alpha_1)+\varepsilon - f(\alpha_1)+\varepsilon) + \cdots && \text{(C.1.5)} \\ &+ (x_n-x_{n-1})(f(\alpha_{n-1})+\varepsilon - f(\alpha_{n-1})+\varepsilon) && \text{(C.1.6)} \end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

soit

$$\int_a^b (U-u)(x)\,dx = nh(2\varepsilon) = (b-a)2\varepsilon$$

Ce qui démontre le résultat. (Pour être rigoureux, il faudrait partir avec $\varepsilon > 0$, poser $\varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ et faire le raisonnement précédent avec ε' de façon à avoir exactement ε dans la dernière inégalité.)

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.4 Sommes de Riemann

Définition C.1.1. ***(Sommes de Riemann)*** *Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Soit*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

une subdivision de $[a,b]$. Donnons nous, pour chaque sous-intervalle

$$[x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

*un point θ_i de ce sous-intervalle. On appelle alors **somme de Riemann** associée à la fonction f, à la subdivision $([x_i, x_{i+1}])_{0 \le i \le n-1}$, la somme :*

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\theta_i).}$$

Nous avons alors la proposition :

Proposition C.1.3. *Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle $[a,b]$ fermé borné de $\mathbb{R}$. Alors,*

$$\lim_{\max|x_{i+1}-x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\theta_i) = \int_a^b f(x)\, dx,$$

quel que soit le choix des points $\theta_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - La fonction f étant continue sur $[a,b]$ y est uniformément continue, soit :

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \text{tel que} \\ \forall x \in [a,b],\ \forall y \in [a,b], \quad (|x-y| \le \eta) \Rightarrow (|f(x)-f(y)| \le \varepsilon). \end{cases}$$

En conséquence, pour toute subdivision (x_i), telle que :

$$\forall i \in \{0,1,\dots,n-1\}, \quad |x_{i+1}-x_i| \le \eta,$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)\, f(\theta_i) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1}-x_i) f(\theta_i) \right| \\ &\le \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - (x_{i+1}-x_i) f(\theta_i) \right| \\ &\le \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\theta_i)\,dx \right| \\ &\le \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| f(x) - f(\theta_i) \right| dx. \end{aligned}$$

Ainsi, pour toute subdivision (x_i) de l'intervalle $[a,b]$ vérifiant :

$$\max_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1}-x_i| \le \eta,$$

nous aurons :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)\, f(\theta_i) \right| \le (b-a)\varepsilon$$

Document C.1.4
Sommes de Riemann

ce qui démontre bien le résultat annoncé.

Retour au cours

Document C.1.5 Intégrabilité des fonctions monotones

Théorème C.1.2. *Toute fonction monotone est intégrable.*

Démonstration Il suffit de montrer ce résultat pour une fonction monotone croissante. Soit donc f une fonction définie sur l'intervalle $[a,b]$ et vérifiant :

$$\forall x \in [a,b],\ \forall y \in [a,b], \quad (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y)).$$

Subdivisons l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ à l'aide des points

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Nous avons alors :

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad f(x_i) \leq f(x) \leq f(x_{i+1})$$

Soit maintenant une subdivision (x_i), vérifiant pour un certain réel $\eta > 0$:

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} |x_i - x_{i+1}| \leq \eta.$$

Il vient, pour cette subdivision :

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|(x_{i+1} - x_i) \leq \eta \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \eta(f(b) - f(a))$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Nous voyons que nous avons construit deux fonctions étagées s et S définies par :

$$\forall i = 0, \ldots, n-1,\ \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad s(x) = f(x_i) \quad \text{et} \quad S(x) = f(x_{i+1}),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

encadrant f et telles que, pour toute subdivision adaptée de $[a,b]$ vérifiant

$$\max_{0\leq i\leq n-1} |x_i - x_{i+1}| \leq \eta \leq \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)},$$

l'on ait :

$$\int_a^b (S(x)-s(x))\,dx = (\sum_{i=0}^{n-1} (S(x)-s(x) \leq \varepsilon.$$

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.6 Fonction réciproque de la fonction tangente hyperbolique

Fonction réciproque de tanh x.

La fonction $f(x) = \tanh x$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et est bijective à valeurs dans $]-1,+1[$. Nous pouvons ainsi introduire la définition suivante :

Définition C.1.2. *On appelle* $\operatorname{Arg}\tanh \boldsymbol{x}$ *la fonction définie sur* $]-1,+1[$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$y = \operatorname{Arg}\tanh x, \quad (-1 < x < 1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \tanh y, \quad y \in \mathbb{R}$$

On a également la représentation suivante (exercice) pour $x \in]-1,+1[$ *:*

$$\operatorname{Arg}\tanh \boldsymbol{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Dérivée de $\operatorname{Arg}\tanh \boldsymbol{x}$**.**

Il suffit de reprendre le raisonnement habituel, et on vérifie (exercice) que pour $x \in]-1,+1[$:

$$(\operatorname{Arg}\tanh x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.7 Le concept de stabilité

Une question importante dans l'étude des équations différentielles concerne le comportement de leurs solutions. En particulier, celui-ci :

Définition C.1.3. *On dit que les solutions d'une équation différentielle sont* **stables** *si, quelle que soit la donnée initiale, le problème de Cauchy associé admet une solution définie sur* $[x_0, \infty[$*, tendant vers 0 quand* x *tend vers* $+\infty$.

Pour l'équation linéaire $y'(x) = a(x)y(x)$, on a donc stabilité des solutions si et seulement si, quel que soit x_0,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt = -\infty$$

C'est par exemple le cas si a est une constante strictement négative. Pour les équations non linéaires, cette question de stabilité n'est pas si aisément résoluble.

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Solution de l'exercice A.1.1

Si f est une fonction constante sur $[a, b]$, alors il existe bien une subdivision de $[a, b]$, à savoir la subdivision $a = x_0 < x_1 = b$, telle que f soit constante sur chacun des sous-intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ de la subdivision.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

La subdivision $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2$ convient. En effet, f est constante, égale à 3 sur $]0,1[$ et constante, égale à 2 sur $]1,2[$.

Toute subdivision plus fine convient aussi. C'est le cas par exemple de la subdivision $0 = x_0 < 0.5 = x_1 < 1 = x_2 < 4/3 = x_3 < 2 = x_4$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

La fonction constante et égale à m sur tout son intervalle de définition est une fonction étagée. Nous l'avons vu plus haut. Une subdivision adaptée est la subdivision $a = x_0 < x_1 = b$. Il en résulte que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = m(x_1 - x_0) = m(b-a).$$

Nous avons aussi vu à l'exercice précédent que la fonction f est étagée : nous avons même exhibé deux subdivisions adaptées. Il en résulte que :

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 3(1-0)+2(2-1) = 3(\frac{1}{2}-0)+3(1-\frac{1}{2})+2(\frac{4}{3}-1)+2(2-\frac{4}{3}) = 5.$$

Notons que les valeurs de f aux points de subdivisions ne joue aucun rôle dans le calcul de la valeur de l'intégrale.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

Prenons comme subdivision associée à f, outre les points a et b les points, en nombre fini, où f est non nulle. Alors, sur chaque sous-intervalle $]x_{i-1}, x-i[$ de cette subdivision, f est nulle, de sorte que son intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} 0(x_i - x_{i-1}) = 0,$$

est nulle.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

Si f est constante (égale à m_i) sur un sous-intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, λf l'est aussi (elle est égale à λm_i). Toute subdivision adaptée à f l'est donc aussi à λf et l'on a :

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} (\lambda m_i)(x_i - x_{i-1}) = \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \right) = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

Les fonctions f et g ne différant qu'en un nombre fini de points, leur différence $f - g$ est nulle, sauf en un nombre fini de points. Nous avons vu plus haut, que cela entraî ne que son intégrale est nulle, soit :

$$\int_a^b (f-g)(x)\,dx = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

Une fonction étagée sur $[a, b]$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs est bornée. Or une fonction f intégrable sur $[a, b]$ est encadrée, par définition, par deux fonctions étagées, donc encadrée par deux fonctions bornées sur $[a, b]$. Elle est donc bornée sur $[a, b]$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

La fonction f étant intégrable, son intégrale existe et est définie par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf_{U:f\le U}\int_a^b U(x)\,dx = \sup_{u:u\le f}\int_a^b u(x)\,dx,$$

de sorte que l'on a bien

$$\int_a^b u(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b U(x)\,dx.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

Soit $c \in]a, b[$. Soit u une fonction étagée sur $[a, b]$. Alors les fonctions u_1 et u_2 définies par :

$$u_1(x) = \begin{cases} u(x), & \text{pour } a \leq x \leq c, \\ 0, & \text{pour } c < x \leq b, \end{cases} \qquad u_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } a \leq x \leq c, \\ u(x), & \text{pour } c < x \leq b, \end{cases}$$

sont clairement étagées. Soient f_1 et f_2 définies à partir de f de la même manière. Donnons nous un $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors, f étant intégrable, il existe deux fonctions étagées s et S telles que

$$s \leq f \leq S \quad \text{et} \quad \int_a^b (S - s)(x)\, dx \leq \varepsilon.$$

Alors, nous voyons que

$$\begin{array}{lll} s_1 \leq f_1 \leq S_1 & \text{et} & \int_a^b (S_1 - s_1)(x)\, dx \leq \varepsilon, \\ s_2 \leq f_2 \leq S_2 & \text{et} & \int_a^b (S_2 - s_2)(x)\, dx \leq \varepsilon, \end{array}$$

ce qui montre que f_1 et f_2 sont intégrables. Le résultat s'en déduit aussitôt, puisque $f = f_1 + f_2$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

On a les inégalités

$$\frac{x}{2} \leq f \leq 2x,$$

Nous avons montré dans le paragraphe (Fonction intégrable - définition) que

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

donc

$$\int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4}, \int_0^1 2x dx = 1$$

nous déduisons que :

$$\frac{1}{4} = \int_0^1 \frac{x}{2}\, dx \leq \int_0^1 f(x)\, dx \leq \int_0^1 2x\, dx = 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

Sur $[0,1[$ $x/2$ est intégrable, d'intégrale $1/4$. Sur $]1,2]$, la fonction 2 est intégrable, d'intǵrale 3. La relation de Chasle nous permet alors d'affirmer que la fonction f est intégrable sur $[0,2]$, d'intégrale $9/4$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

Cette aire est calculée par l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

1. Non, cette fonction n'est pas nulle sur l'intervalle $[0,2]$, puisqu'elle est égale à 1 au point $x = 1$.
2. Son intégrale se calcule par
$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = 0 + 0 = 0$$
3. Non, il n'y a pas de contradiction avec le théorème cité, car la fonction f de l'exercice n'est pas continue. Si nous reprenons la démonstration du théorème, nous voyons que le point clé est que $f(1) \neq 0$ et pourtant, il n'existe pas de sous-intervalle $[1-\eta, 1+\eta]$ où f soit non nulle en tout point.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

Pour h négatif, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{1}{-h}\int_{a+h}^{a} f(x)\,dx.$$

Posons alors $\delta = -h$. Alors δ est positif et nous devons calculer la limite, lorsque $\delta > 0$ tend vers 0 de

$$\frac{1}{\delta}\int_{a-\delta}^{a} f(x)\,dx.$$

La démonstration se poursuit ensuite comme celle de la proposition 7.1.6, avec cette fois-ci les quantités

$$m(\delta) = \min_{a-\delta\le x\le a} f(x) \text{ et } M(\delta) = \max_{a-\delta\le x\le a} f(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

Le théorème fondamental de l'analyse nous permet d'exprimer ces intégrales à l'aide d'une primitive de t^2. Il vient ainsi

$$\int_0^x t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}.$$

De même

$$\int_1^x t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

1. $$\int_0^\pi \sin x\, dx = \pi \sin(\theta\pi), \text{ avec } \theta \in]0,1[.$$

2. Comme la fonction sinus garde un signe constant sur l'intervalle $[0,\pi]$, nous pouvons utiliser le deuxième théorème de la moyenne, ce qui donne

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\, dx = f(\theta_f\pi)\int_0^\pi \sin x\, dx, \text{ avec } \theta_f \in]0,1[.$$

Enfin, nous avons déjà calculé cette dernière intégrale (exercice A.1.12), ce qui donne

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\, dx = 2f(\theta_f\pi).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit dans ce cas

$$\left|\int_a^b \alpha g(x)\,dx\right|^2 \leq \left(\int_a^b \alpha^2\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$

d'où

$$\alpha^2 \left|\int_a^b g(x)\,dx\right|^2 \leq (b-a)\,\alpha^2\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$

soit, après simplification par α^2

$$\left|\int_a^b g(x)\,dx\right|^2 \leq (b-a)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

Donnons nous une subdivision de l'intervalle $[a,b]$, en n sous-intervalles, à l'aide de points $x_i = a+i(b-a)/n$, $i=0,\dots,n$. Nous construisons deux familles de fonctions étagées s_n et S_n, par

$$\begin{cases} \forall x \in [x_i, x_{i+1}[, \quad s_n(x) = f(x_i), \\ s_n(b) = f(b), \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x \in]x_i, x_{i+1}], \quad S_n(x) = f(x_{i+1}), \\ S_n(a) = f(a), \end{cases}$$

où i varie de 0 à $n-1$.
Les fonctions étagées s_n et S_n encadrent alors f et l'on a

$$\int_a^b s_n(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad \int_a^b S_n(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}),$$

l'intégrale de f est encadrée par celles de s_n et S_n.

$$\int_a^b s_n(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b S_n(x)\,dx$$

$$\int_a^b (S_n - s_n)(x)\,dx = \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)),$$

On obtient une majoration de l'erreur par

$$\int_a^b (f - s_n(x))\,dx \le \int_a^b (S_n - s_n)(x)\,dx, \ \int_a^b (S_n(x) - f(x))\,dx \le \int_a^b (S_n - s_n)(x)\,dx$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = (-\cos \frac{\pi}{2}) - (-\cos 0) = 1, \quad \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} x \, dx = \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^1 = \frac{2}{5}, \quad \int_1^e \frac{1}{x} \, dx = \ln e - \ln 1 = \ln e = 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

1. Posons $u' = 1$, $v = \ln x$, d'où $u = x$, $v' = 1/x$. Il vient alors

$$\int_a^b \ln x\, dx = [x \ln x]_a^b - \int_a^b \frac{x}{x}\, dx = b \ln b - a \ln a - (b - a).$$

2. On fait deux intégrations par parties successives, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2 e^x\, dx &= [x^2 e^x]_a^b - \int_a^b 2xe^x\, dx && \text{(C.1.7)}\\
&= [x^2 e^x]_a^b - [2xe^x]_a^b + \int_a^b 2e^x\, dx && \text{(C.1.8)}\\
&= [x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x]_a^b && \text{(C.1.9)}\\
&= e^b(b^2 - 2b + 2) - e^a(a^2 - 2a + 2). && \text{(C.1.10)}
\end{aligned}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.21

1. La première intégrale se calcule par changement de variable. Posons

$$t = \varphi(x) = x^2,$$

$$dt = 2x\,dx,$$

pour $x = 0$, on a $t = 0$, pour $x = 1$, on a $t = 1$.

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\left[\ln|1+t|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

2. La deuxième intégrale s'obtient en intégrant par parties. Posons $u' = 1$ et $v = \operatorname{Arctan} x$. Il vient $u = x$ et $v' = 1/(1+x^2)$, d'où

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan} x\,dx = [x\operatorname{Arctan} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

3. La troisième intégrale s'obtient par changement de variable. Posons

$$t = \varphi(x) = \operatorname{Arctan}(x),$$

$$dt = \frac{dx}{1+x^2},$$

pour $x = 0$, on a $t = 0$, pour $x = 1$, on a $t = \frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,dt = \frac{\pi^2}{32}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.22

1. Lorsque x est positif, $\ln|x| = \ln x$. Sa dérivée est donc $1/x$.
2. Lorsque x est négatif, $\ln|x| = \ln(-x)$. Sa dérivée est donc $(-1)/(-x) = 1/x$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.23

1. (i) On écrit que

$$b \times \frac{a}{b} = a, \text{ de sorte que } \ln b + \ln \frac{a}{b} = \ln a.$$

2. (ii) Par récurrence .

$$\ln(\prod_{i=1}^{1} a_i) = \ln a_1 = \sum_{i=1}^{1} \ln a_i.$$

   Supposons la proposition vraie pour $q \geq 1$, alors

$$\ln(\prod_{i=1}^{q+1} a_i) = \ln((\prod_{i=1}^{q} a_i) a_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q} \ln a_i + \ln a_{q+1} = \sum_{i=1}^{q+1} \ln a_i.$$

3. (iii) On utilise ce qui précède avec $a_i = a, i = 1, \ldots, p$.
4. (iv) Si p est négatif, $p = -q, a^p = \frac{1}{a^q}$, donc

$$\ln a^p = -\ln a^q = -q \ln a = p \ln a$$

5. (v) Il suffit de poser $a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q$ donc

$$\ln a = q \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right).$$

6. (vi) Si $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}$, alors $a^x = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$, donc

$$\ln a^x = p \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{p}{q} \ln a = x \ln a$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.24

1.
$$\left\{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right\}^q = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{pq} = \left\{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right\}^p = x^p = \left\{(x^p)^{\frac{1}{q}}\right\}^q,$$
d'où l'on déduit par passage à la fonction réciproque
$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = (x^p)^{\frac{1}{q}},$$
ce qui permet de donner un sens à l'expression $x^{p/q}$.

2.
$$\ln \exp(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} = \frac{p}{q} \ln e = \ln e^{\frac{p}{q}}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.25

1. On développe le second membre en remplaçant les cosinus et sinus hyperboliques par leurs expressions en fonction de e^a, e^{-a}, e^x et e^{-x}.
2. Il suffit de dériver par rapport à x la relation précécente.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.26

1. $$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} = e^{x\ln a} e^{y\ln a} = a^x a^y$$

2. $$(a^x)^y = (e^{x\ln a})^y = e^{y\ln(e^{x\ln a})} = e^{yx\ln a} = a^{xy}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.27

1. Pour m entier positif ou nul, on pose $x^0 = 1$, puis $x^{m+1} = x^m x$.
2. Pour m entier négatif, on pose $x^m = 1/x^{-m}$.
3. Pour m entier, on définit $x^{1/m}$ comme fonction réciproque de x^m.
4. Pour $r = p/q$, rationnel, on définit x^r, comme expliqué dans l'exercice A.1.24.
5. Pour y réel, on définit x^y par $e^{x \ln y}$.

à chaque étape, on vérifie que

1. La nouvelle définition est une extension des précédentes, c'est-à-dire, par exemple, que pour $\alpha = r$, la définition de x^α, pour α réel, redonne bien x^r pour r rationnel.
2. Les règles de calcul sont bien conservées, c'est-à-dire que

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}.$$

Retour à l'exercice ▲

Les solutions s'écrivent respectivement

$$y(x) = Ce^{A(x)}, \text{ et } y(x) = \hat{C}e^{\hat{A}(x)}.$$

Or, puisque A et $\hat{A}$ sont deux primitives de $a(x)$, on a

$$\hat{A}(x) = A(x) + \lambda.$$

On obtient donc

$$y(x) = \hat{C}e^{\lambda}e^{A(x)}.$$

On obtient donc les solutions en fonction de A mais avec une constante "différente", ce qui redonne évidemment les mêmes solutions puisque les constantes peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.29

La solution générale de $y'(x) = a(x)y(x)$ s'écrit $y(x) = Ce^{A(x)}$. Si on utilise la condition $y(x_0) = y_0$, on obtient

$$Ce^{A(x_0)} = y_0$$

ce qui donne

$$C = y_0 e^{-A(x_0)},$$

que l'on remplace dans la solution

$$y(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)}.$$

Si une solution s'annule en un point, cela signifie qu'il existe x_0 tel que $y(x_0) = 0$. On obtient donc pour solution $y(x) = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.30

Le calcul des primitives se fait par intégration par parties :

$$\begin{aligned} S(x) &= e^{-2x}\left(-\frac{\cos\omega x}{\omega}\right) - \int (-2)e^{-2x}\left(-\frac{\cos\omega x}{\omega}\right)dx, \\ &= -\frac{1}{\omega}e^{-2x}\cos\omega x - \frac{2}{\omega}e^{-2x}\frac{\sin\omega x}{\omega} + \frac{2}{\omega}\int (-2)e^{-2x}\frac{\sin\omega x}{\omega}\,dx, \\ &= -\frac{1}{\omega}e^{-2x}\cos\omega x - \frac{2}{\omega^2}e^{-2x}\sin\omega x - \frac{4}{\omega^2}S(x). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$S(x) = -\frac{2}{\omega^2+4}e^{-2x}\sin\omega x - \frac{\omega}{\omega^2+4}e^{-2x}\cos\omega x.$$

Dans l'exercice , vous avez montré que la solution de l'équation homogène, associée à

$$y'(x) = 2y(x) + \sin\omega x$$

est

$$y_h(x) = Ce^{2x}.$$

Pour obtenir la solution générale, on va utiliser

$$S(x) = \int e^{-2x}\sin\omega x\,dx.$$

La solution générale est

$$y(x) = (S(x)+C)e^{2x}$$

soit

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{2}{\omega^2+4}\sin\omega x - \frac{\omega}{\omega^2+4}\cos\omega x.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.31

Puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on a donc la solution particulière $y_p(x) = \sin x$. La solution générale est donc

$$y(x) = C\cos x + \sin x,$$

puisque l'on a déjà démontré (voir le paragraphe) que

$$y_h(x) = C\cos x.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.32

La solution générale (voir le paragraphe) de l'équation homogène est :

$$y_h(x) = C\cos x.$$

Posons

$$y_p(x) = \phi(x)\cos x$$

et reportons dans l'équation avec second membre, on trouve :

$$\phi'(x)\cos^2 x = 1$$

qui admet comme solution

$$\phi(x) = \tan x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière ($C = 0$) est donc

$$y_p(x) = \tan x \cos x = \sin x.$$

Et la solution générale s'obtient comme la somme de y_h et y_p :

$$y(x) = C\cos x + \sin x.$$

Si l'on considère directement toutes les primitives ϕ, on obtient

$$y(x) = (\tan x + C)\cos x = \sin x + C\cos x$$

ce qui redonne la solution générale.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.33

Puisque la solution de l'équation homogène est

$$y_h(x) = Ce^{2x},$$

on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = \phi(x)e^{2x}$$

et on remplace dans l'équation

$$\phi'(x)e^{2x} + \phi(x)2e^{2x} = 2\phi(x)e^{2x} + \sin\omega x$$

soit

$$\phi(x) = \int e^{-2x}\sin\omega x.$$

Ce calcul, comme nous l'avons déjà dit revient au calcul de l'exercice A.1.30.

Retour à l'exercice ▲

$y = 0$ est solution évidente, cherchons les autres solutions. Puisque $\alpha = 2$, le changement de fonction inconnue est

$$z = \frac{1}{y}$$

ce qui donne l'équation différentielle en z :

$$x^2 z' - z - 1 = 0$$

dont la solution générale est

$$z(x) = Ce^{-1/x} - 1.$$

En effet l'équation homogène a pour solution $z_h(x) = Ce^{-1/x}$ et $z_p(x) = -1$ est une solution particulière évidente. Les solutions de l'équation de Bernoulli sont donc

$$y(x) = \frac{1}{Ce^{-1/x} - 1}, \text{ et } y(x) = 0.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.35

On pose $u = y - w$ et on obtient l'équation en u

$$u' - \frac{u}{x} - u^2 = 0$$

qui est une équation de Bernoulli pour $n = 2$.

On pose alors $z = \frac{1}{u}$ et on obtient l'équation

$$-z' - \frac{z}{x} - 1 = 0$$

qui est une équation différentielle du premier ordre linéaire avec second membre que l'on résout. Tout calcul fait, on trouve

$$y = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 + C}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.1

La croissance de la fonction f implique

$$u(x) \leq f(x) \leq U(x), \ \ \forall x \in]0,1[$$

Retour à l'exercice ▲

$$\int_0^1 u(x)\,dx = h\left(1 + e^h + e^{2h} + \ldots + e^{(N-1)h}\right)$$

On reconnait la somme d'un série géométrique.

Retour à l'exercice ▲

Si on pose $r = e^h$, on obtient

$$\int_0^1 u(x)\,dx = h\left(1 + r + r^2 + \ldots + r^{(N-1)}\right) = h\frac{1-r^N}{1-r} = h\frac{1-e^{Nh}}{1-e^h} = h\frac{1-e}{1-e^h}.$$

Retour à l'exercice ▲

Une relation simple lie

$$\int_0^1 u(x)dx$$

à

$$\int_0^1 U(x)dx.$$

Retour à l'exercice ▲

Ecrire

$$\int_0^1 U(x)\,dx.$$

et constater

$$\int_0^1 U(x)\,dx = e^h \int_0^1 u(x)\,dx = he^h \frac{1-e}{1-e^h}.$$

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.1

Revenir aux sommes qui définissent $\int_0^1 U(x)dx$ et $\int_0^1 u(x)dx$, faire la différence, tous les termes s'annulent sauf deux d'entre eux, on obtient

$$\int_0^1 U(x) - u(x)dx = \int_0^1 U(x)dx - \int_0^1 u(x)dx = h(e^{Nh} - 1) = h(e-1) = \frac{e-1}{n}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4, Exercice A.2.1

Soit $\epsilon > 0$, il suffit de choisir n tel que

$$\frac{e-1}{n} \leq \epsilon \Longleftrightarrow n \geq \frac{e-1}{\epsilon}$$

On aura alors

$$u(x) \leq f(x) \leq U(x)$$

et

$$\int_0^1 U(x) - u(x) dx \leq \epsilon.$$

Ce qui montre par définition que f est intégrable sur $[0,1]$.

Retour à l'exercice ▲

On peut utiliser le chapitre 5, la limite est égale à la dérivée de f en 0, c'est à dire 1.

On peut également utiliser le chapitre 6 et les développements limités pour lever cette indétermination.

On utilise cette limite pour obtenir

$$l_1 = l_2 = e - 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 6, Exercice A.2.1

Revoir la définition de l'intégrale I comme borne supérieure d'un ensemble A et comme borne inférieure d'un ensemble B.

Retour à l'exercice ▲

Pour tout n, donc pour tout h,

$$\int_0^1 u(x)dx \in A,$$

donc par définition de la borne supérieure

$$\int_0^1 u(x)dx \leq I$$

I lui ne dépend pas de h. En utilisant les résultats sur les limites, on peut en déduire que

$$l_1 \leq I$$

Raisonner sur l_2.

Retour à l'exercice ▲

Pour tout n, donc pour tout h,

$$\int_0^1 U(x)\,dx \in B,$$

donc par définition de la borne inférieure

$$\int_0^1 U(x)\,dx \geq I$$

I lui ne dépend pas de h. En utilisant les résultats sur les limites, on peut en déduire que

$$l_2 \geq I$$

Retour à l'exercice ▲

On a montré

$$l_1 = l_2 = e - 1$$

$$l_1 \leq I \leq l_2$$

donc

$$I = e - 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.2

Une inégalité avec valeurs absolues a été démontrée dans un des théorèmes du cours. Revoir ce théorème, quelles étaient les hypothèses ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.2

On a démontré un théorème avec $a < b$, citer ce théorème.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.2

Si $a' < b'$, si f est intégrable sur $[a', b']$ alors

$$\left|\int_{a'}^{b'} f(t)dt\right| \leq \int_{a'}^{b'} \left|f(t)\right| dt.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Exercice A.2.2

Pour démontrer l'inégalité de l'exercice, étudier trois cas :

— $a < b$

— $a = b$

— $a > b$

Retour à l'exercice ▲

Aide 5, Exercice A.2.2

Si $a = b$ que vaut par définition une intégrale de a à b ?
Quelle relation lie l'intégrale de a à b à l'intégrale de b à a ?
Quand $a' < b'$, quand une fonction est positive sur $[a', b']$, quel est le signe de l'intégrale de a' à b' ?
Quelle est la définition de la valeur absolue ?
Utiliser toutes ces propriétés pour conclure.

Retour à l'exercice ▲

— Si $a < b$, utiliser le théorème cité précédemmment.

Constater que $\int_a^b |f(t)|dt \geq 0$, donc égal à sa valeur absolue.

— $a = b$, l'inégalité devient $0 \leq 0$.

— $a > b$, poser $a' = b, b' = a$, utiliser le théorème et continuer ....

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.3

Pensez à comparer x^2 et x sur les intervalles qui vous intéressent.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.3

Sur l'intervalle $[0,1]$, on a $x^2 < x$ et donc $e^{-x} < e^{-x^2}$. Il suffit alors d'intégrer "l'inégalité". Raisonnez de la même manière sur l'intervalle $[1,a]$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.4

Pensez à utiliser la primitive de la fonction F qui existe puisque la fonction f est continue.

Retour à l'exercice ▲

D'après les résutats du paragraphe Intégrale et primitive, on a

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = F(v(x)) - F(u(x)),$$

d'où

$$g'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Retour à l'exercice ▲

Pensez à dériver.

Retour à l'exercice ▲

En dérivant on obtient

$$f(x+a) = f(x-a).$$

Est-ce bien la définition d'une fonction périodique de période $2a$?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3a, Exercice A.2.4

L'intervalle d'étude de $g(x)$ est en réalité celui de $\sin^2 x$. Quel est-il ?

Retour à l'exercice ▲

Il est clair que $\sin^2 x$ est périodique de période π. Penser alors à $\sin(\pi - x)$.

Retour à l'exercice ▲

Utiliser le résultat général de la première question.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3b, Exercice A.2.4

Attention la dérivée fait intervenir la quantité

$$\arcsin \sqrt{\sin^2 x} = \arcsin |sinx|.$$

Souvenez-vous du domaine d'arrivée de arcsin!

Retour à l'exercice ▲

Puisque $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors vous pouvez démontrer facilement que

$$\arcsin|sin x| = x.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3c, Exercice A.2.4

Pensez à utiliser $\sin 2x$ et à faire une intégration par partie.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3c, Exercice A.2.4

On trouve que les primitives sont

$$F(x) = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Question 3d, Exercice A.2.4

Pensez à rapprocher les résultats des deux questions précédentes...

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3d, Exercice A.2.4

On a

$$g(x) = F(x)$$

et la constante est déterminée par $g(0)$.

Retour à l'exercice ▲

Déterminer l'angle $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $g(y) = g(x)$.

Retour à l'exercice ▲

On trouve $y = \frac{\pi}{3}$ et donc

$$g(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}\cos 2\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\sin 2\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Question 4a, Exercice A.2.4

Utiliser le résultat de la question 1. Le calcul ne présente pas de difficulté particulière.

Retour à l’exercice ▲

Que vaut $\sin(a+b)$?

Retour à l'exercice ▲

N'oubliez pas que, puisque $\sin x$ ne dépend pas de la variable d'intégration t, vous pouvez le sortir de l'intégrale. Utilisez alors les résultats de (a).

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4(b)ii, Exercice A.2.4

Dans le changement de variable $u = x - t$, la variable x est constante et donc on remplace dt par??? N'oubliez pas de changer les bornes d'intégration.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4(b)ii, Exercice A.2.4

On obtient

$$h(x) = \int_x^{x-x^3} \sin(u)(-1)\,du.$$

Utilisez alors les résultats de (a).

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe Moyenne-théorèmes.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.5

Ne confondez pas une fonction non continue et une fonction non définie. Il suffit de construire une fonction avec un saut en 0 et telle que les aires se "compensent".

Retour à l’exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.5

Prenez par exemple $f(x) = 1$ pour $x \geq 0$, $f(x) = -1$ pour $x < 0$ et intégrez sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.5

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$ est définie par

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Un point fixe pour une fonction f annule quelle fonction ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.5

Soit la fonction $g(x) = f(x) - x$, alors un point fixe de f annule la fonction g. Calculer alors l'intégrale de g sur $[0,1]$ et appliquer la première question.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.6

Uiliser la relation de Chasles pour découper sur deux intervalles où la fonction à intégrer a un signe constant.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.6

$$\int_{\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

et faire un changement de variable sur la deuxième intégrale pour vous ramener à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.6

On pose $t = x - \pi$ et on obtient

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{\pi}^{2\pi} -\frac{\sin(t)}{t+\pi} dt$$

et on regroupe avec la première intégrale.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe Cauchy-Schwarz-inégalité.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.7

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz à la fonction f (puis f') et à la fonction constante 1.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.8

Voir le paragraphe Moyenne-théorèmes.

Retour à l’exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.8

Pensez à utiliser le second théorème de la moyenne. Dans quel intervalle se trouve c ?

Retour à l'exercice ▲

On trouve

$$lim_{x\to 0}\int_{x}^{2x}\frac{f(t)}{t^2}dt=\frac{1}{2}f(0),$$

car c tend vers 0 et f est continue.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.9

Il y a plusieurs démonstrations possibles. L'une d'entre elles utilise le premier théorème de la moyenne en considérant $\arctan x$ ou $e^x - 1$ comme une intégrale définie.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.9

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x\frac{1}{1+c^2}$$

où $c \in]0, x[$. Il ne vous reste plus quà majorer avec l'hypothèse $x \geq 0$. Faites de même pour la deuxième inégalité.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.9

La première ingalité se démontre en utilisant le premier théorème de la moyenne et en prenant la valeur absolue pour majorer le sinus par 1. La deuxième utilise le deuxième théorème de la moyenne

Retour à l’exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.9

$$\int_0^a \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx = \sin c \int_0^a \frac{1}{1+x^2}\,dx = \sin c \arctan a,$$

avec $c \in]0, a[$. Il suffit alors de prendre la valeur absolue.

Retour à l'exercice ▲

Si 0 n'appartient pas à l'intervalle $[a,b]$, la fonction $\frac{\sin t}{t}$ est continue sur $[a,b]$, donc intégrable sur $[a,b]$.

Si 0 appartient à l'intervalle $[a,b]$, la fonction $\frac{\sin t}{t}$ est continue sur $[a,b]$, sauf en 0 où elle admet une limite à gauche et une limite à droite, la fonction est donc intégrable sur $[a,b]$.

Les limites à gauche et à droite de 0 sont égales donc non seulement la fonction est intégrable, mais elle est prolongeable par continuité et on peut lui appliquer les théorèmes réservés aux fonctions continues.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.10

On peut par exemple utiliser le 1er théorème de la moyenne. Le citer.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.10

$$\exists c_x \text{ strictement compris entre } 0 \text{ et } x \text{ tel que } \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = x\frac{\sin c_x}{c_x}$$

D'où

$$F(x) = \frac{\sin c_x}{c_x}.$$

Attention, comme la notation l'indique c_x dépend de x.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.10

c_x est strictement compris entre 0 et x, donc quand x tend vers 0, c_x tend vers 0, donc $\dfrac{\sin c_x}{c_x}$ tend vers 1.

$$\lim_{x \to 0} F(x) = 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Montrer que la fonction est continue sur l'intervalle d'intégration.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.11

La fonction $\frac{\cos t}{\ln t}$ est continue en tout t pour lequel $\ln t$ est défini et non nul (pour pouvoir diviser).

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.11

La fonction $\frac{\cos t}{\ln t}$ est continue en tout t strictement positif et différent de 1. Vérifier que si t appartient à l'intervalle d'intégration, alors $t \neq 1$ et $t > 0$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1, Exercice A.2.11

Si $x \in]0,1[$, alors $x^2 < x$ et de plus $x^2 \in]0,1[$, l'intervalle d'intégration est alors tout entier inclus dans $]0,1[$.

Que se passe-t-il si $x \in]1,+\infty[$?

Retour à l'exercice ▲

Si $x \in]1,+\infty[$, alors $x < x^2$ et de plus $x^2 \in]1,+\infty[$, l'intervalle d'intégration est alors tout entier inclus dans $]1,+\infty[$.

Retour à l'exercice ▲

Utiliser le 2ème théorème de la moyenne. Vérifier que les hypothèses sont satisfaites.

Retour à l'exercice ▲

$t \cos t$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

$\dfrac{1}{t \ln t}$ est continue sur l'intervalle d'intégration car $t > 0$ et $t \neq 1$, donc le dénominteur ne s'annule pas.

De plus $\dfrac{1}{t \ln t}$ garde un signe constant sur l'intervalle d'intégration (positif si $x \in]1, +\infty[$, négatif si $x \in]0, 1[$).

On peut donc utiliser le 2ème théorème de la moyenne.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.11

$$\exists c \text{ compris entre } x \text{ et } x^2 \text{ tel que } F(x) = c\cos c \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.11

On peut reconnaitre, dans la fonction à intégrer, la dérivée d'une fonction composée. On obtient alors directement l'intégrale.

On peut faire également un changement de variable.

Retour à l'exercice ▲

Poser $u = \ln t$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 3, Exercice A.2.11

$$du = \frac{dt}{t}$$

$$t = x \Rightarrow u = \ln x, \ \ t = x^2 \Rightarrow u = \ln(x^2) = 2\ln x.$$

Ecrire la nouvelle intégrale.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 3, Exercice A.2.11

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \int_{lnx}^{\ln(x^2)} \frac{du}{u}$$

Retour à l'exercice ▲

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t} dt \quad = \quad \int_{lnx}^{\ln(x^2)} \frac{du}{u} = \ln(|\ln(x^2)|) - \ln(|\ln x|) = \ln\left(\left|\frac{\ln x^2}{\ln x}\right|\right) = \ln 2$$

Attention aux valeurs absolues, x étant postif on peut écrire $\ln x$, par contre, on n'a pas forcément $\ln x > 0$, donc on a $\ln(|\ln x|)$.

Retour à l'exercice ▲

On a donc démontré qu'il existe c compris entre x et x^2 tels que

$$F(x) = c \cos c \ln 2.$$

Attention c dépend de x.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4, Exercice A.2.11

Quand x tend vers 1, c tend donc vers 1, donc $c\cos c$ tend vers $\cos 1$ et donc

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \cos 1 \ln 2.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.13

$$h = \frac{1}{n}.$$

$$x_i = ih.$$

$$I_h = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h\left(1 + \frac{1}{1+h} + \frac{1}{1+2h} + \ldots + \frac{1}{1+(n-1)h}\right).$$

Retour à l'exercice ▲

Revoir, dans le cours, l'expression de l'erreur.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.13

Si on note e l'erreur commise, on a

$$|e| \leq \frac{h}{2} \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1, Exercice A.2.13

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Donc

$$\max_{0 \le x \le 1} |f'(x)| = 1.$$

$$|e| \le \frac{h}{2}.$$

Retour à l'exercice ▲

On doit donc avoir

$$\frac{h}{2} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{n} = h \leq 2 \times 10^{-2} \Leftrightarrow n \geq 50.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.13

$$I_h = h\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1+h} + \ldots + \frac{1}{1+(n-1)h} + \frac{1}{2(1+nh)}\right).$$

Retour à l'exercice ▲

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad \max_{0 \le x \le 1} f''(x) = 2.$$

En déduire un majorant de l'erreur.

Retour à l'exercice ▲

$$|e| \leq \frac{2}{12}h^2 = \frac{2}{12n^2}.$$

A quelle condition sur n, $|e|$ est-elle inférieure à 10^{-2} ?

Retour à l'exercice ▲

L'entier n doit donc vérifier

$$n^2 \geq \frac{100}{6} \Leftrightarrow n \geq 5.$$

Retour à l'exercice ▲

Pour obtenir la même précision, la méthode des trapèzes demande une discrétisation moins fine, elle est plus efficace.

Ces méthodes de calcul numérique approché sont développées dans l'UV d'analyse numérique.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.14

Un calcul évident donne

$$I = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2a, Exercice A.2.14

Voir le paragraphe Calcul numérique sur la méthode des rectangles.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2a, Exercice A.2.14

Les points x_k de la méthode des rectangles ont pour valeur $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$. En ces points on a

$$f(x_k) = \frac{1}{1+x_k} = \frac{n}{n+k}.$$

De plus on a $h = \frac{1}{n}$, d'où

$$I_n = h(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \ldots + \frac{n}{2n-1}\right),$$

soit

$$I_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.14

Le calcul d'erreur de la méthode des rectqngles est fait dans le paragraphe Calcul numérique.

Retour à l'exercice ▲

On applique le résultat sur le calcul d'erreur et il reste à calculer

$$M = \max_{0 \le x \le 1} |f'(x)|.$$

Montrer que l'on trouve $M = 1$. Il en résulte que

$$|I_n - I| \le \frac{1}{2n}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2c, Exercice A.2.14

Il suffit de passer à la limite quand n tend vers l'infini dans le résultat précédent. Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

La suite $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$ n'est autre que I_n. Or

$$\lim_{n\to\infty} |I_n - I| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} (= 0),$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} I_n = I,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \right) = \ln 2.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3a, Exercice A.2.14

Un calcul simple d'intégration donne

$$J_{n+1} = \ln(n+1).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3b, Exercice A.2.14

Voir le paragraphe Calcul numérique sur la méthode des rectangles. Prendre n intervalles de longueur $\frac{1}{n+1}$ car

$$\frac{1}{n+1} + n * \frac{1}{n+1} = 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3b, Exercice A.2.14

Les points x_k de la méthode des rectangles ont pour valeur $x_k = \frac{1}{n+1} + \frac{k}{n+1} = \frac{k+1}{n+1}$, $k = 0, \ldots, n-1$. En ces points on a

$$f(x_k) = \frac{1}{x_k} = \frac{n+1}{k+1}.$$

De plus on a $h = \frac{1}{n+1}$, d'où un calcul approché de J_{n+1} par la méthode des rectangles donne

$$K_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left((n+1) + \frac{n+1}{2} + \ldots + \frac{n+1}{n}\right).$$

Comparer alors sur un graphe J_{n+1} et K_{n+1}.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 3b, Exercice A.2.14

Puisque la fonction est décroissante la somme des aires des rectangles qui correspond à K_{n+1} est supérieure à l'aire située sous la courbe et correspondant à J_{n+1}. D'où le résultat demandé.

Retour à l'exercice ▲

Pensea à remplacer J_{n+1} par sa valeur dans l'inégalité de la question précédente.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3c, Exercice A.2.14

Il suffit de passer à la limite quand n tend vers l'infini dans l'inégalité de la question précédente pour obtenir le résultat.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.15

1. Si $n = -1$ $I_1 = \frac{1}{2}$, sinon $I_1 = \dfrac{e^{n+1}}{n+1} - \dfrac{e^{n+1}-1}{(n+1)^2}$, $I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$,
2. $I_3 = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$, $I_4 = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$.

Retour à l'exercice ▲

Faire des intégrations par parties.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.17

La fonction que l'on intègre est positive.

$0 < 1$.

Donc $0 \leq I_n$.

Essayer, maintenant, de majorer I_n par une suite qui tend vers 0.

Revoir les règles sur les inégalités.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.17

$$\forall x \in [0,1], \quad 1 \leq 1 + x^n.$$

Retour à l'exercice ▲

Donc

$$\forall x \in [0,1], \quad \frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Donc en multipliant par le terme positif x^n, on obtient :

$$\forall x \in [0,1], \quad \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n.$$

Retour à l'exercice ▲

On a $0 < 1$, en utilisant, de plus, l'inégalité précédente, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}.$$

Retour à l'exercice ▲

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

En utilisant les résultats du chapitre sur les suites, on a donc

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

Retour à l'exercice ▲

On peut écrire $x^n = xx^{n-1}$.

Retour à l'exercice ▲

On calcule une primitive F de $f(x) = \dfrac{x^{n-1}}{1+x^n}$.

Que vaut F ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.17

$$F(x) = \frac{1}{n}\ln(1 + x^n).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 2, Exercice A.2.17

On utilise une intégration par parties pour calculer

$$\int_0^1 x f(x) dx.$$

Retour à l'exercice ▲

On obtient :

$$I_n = \left[\frac{1}{n} x \ln(1+x^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx.$$

D'où le résultat demandé.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.17

On applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, à la fonction $g(x) = \ln x$ au point $a = 1$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.17

Pour tout t tel que $1+t>0$, c'est à dire pour tout t tel que $t>-1$, on a

$$\exists \theta \in]0,1[, g(1+t) = g(1) + t g'(1) + \frac{t^2}{2} g''(1+\theta t).$$

Calculer les dérivées de g.

Retour à l'exercice ▲

$$g(1) = 0, g'(1) = 1, g''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

On a donc

$$g''(1+\theta t) \leq 0.$$

En remplaçant :

$$\ln(1+t) - t \leq 0.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4, Exercice A.2.17

On va montrer, en l'encadrant, que $u_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$ est une suite qui tend vers 0.

Retour à l'exercice ▲

On utilise la majoration précédente, on obtient :

$$\forall x \in [0,1] \quad 0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n.$$

D'où :

$$0 \leq \int_0^1 \ln((1+x^n)dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Retour à l'exercice ▲

Par encadrement, on a donc

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \ln((1+x^n)\,dx = 0.$$

D'où le résultat sur la suite nI_n.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.20

$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{x+T} f(t)\,dt = I_1 + I_2 + I_3.$$

Montrer que $I_1 = -I_3$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.20

Faire un changement de variable afin de ramener les bornes de I_3 entre 0 et x.

Retour à l'exercice ▲

Pour ramener I_3 à une intégrale entre 0 et x, il faut poser $y = t - T$.

Que devient I_3 en utilisant ce changement de variable ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1, Exercice A.2.20

$$t = T \Leftrightarrow y = 0, \quad t = x + T \Leftrightarrow y = x.$$

$$dt = dy.$$

$$f(t) = f(y + T)$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 5, Question 1, Exercice A.2.20

$$I_3 = \int_T^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^x f(y+T)\,dy.$$

Utiliser la périodicité de f.

Retour à l'exercice ▲

Aide 6, Question 1, Exercice A.2.20

$$I_3 = \int_T^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^x f(y+T)\,dy = \int_0^x f(y)\,dy = -I_1.$$

Ce qui termine la démonstration.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.20

Utiliser l'exercice pour calculer $F'(x)$.

Retour à l'exercice ▲

$$F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0.$$

Donc F est constante, donc $F(x) = F(0)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.21

(rep : $\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C,\ -\sqrt{1-t^2}+C,\ \frac{1}{30}(1+t^5)^6+C,\ \frac{1}{2}\ln^2|t|+C,\ \frac{1}{2}\arctan t^2+C,\ \frac{2}{3}(\sin t)^{\frac{3}{2}}+C,\ \frac{1}{2}(\arctan t)^2+C,\ e^t(t-1)^2+C,$ $t(\ln|t|-1)+C,\ t\arccos t-\sqrt{1-t^2}+C,\ \frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C,\ \frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x+C,\ \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C,\ \frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C,$ $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin 5x+C,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\cos x)+C.$)

Retour à l'exercice ▲

Si on pose

$$x_1 = x, \;\; x_2 = a + b - x,$$

montrer que pour tout x, $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ est constante.

Retour à l'exercice ▲

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{a+b}{2},\ \ f(x_1)=f(x_2).$$

En déduire un axe de symétrie pour la courbe représentative de f.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.22

La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{a+b}{2}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.22

$$x = a \Leftrightarrow t = b, \;\; x = b \Leftrightarrow t = a.$$

$$dx = -dt.$$

$$xf(x) = (a + b - t)f(t).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.22

$$\int_a^b xf(x)dx = -\int_b^a (a+b-t)f(t)dt = -\int_a^b tf(t)dt + (a+b)\int_a^b f(t)dt.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.22

$$\int_a^b xf(x)dx = -\int_a^b tf(t)dt + (a+b)\int_a^b f(t)dt \iff 2\int_a^b xf(x)dx = (a+b)\int_a^b f(t)dt.$$

Ce qui permet d'obtenir le résultat.

Retour à l'exercice ▲

Vérifier que les hypothèses des questions précédentes sont satisfaites.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4, Exercice A.2.22

La fonction f est continue sur $[0, \pi]$ et on a bien

$$f(\pi - x) = f(x).$$

On peut donc utiliser le résultat démontré précédemment.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 4, Exercice A.2.22

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 4, Exercice A.2.22

Pour calculer

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx,$$

faire un changement de variable judicieux.

Retour à l'exercice ▲

On pose $u = \cos x$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 6, Question 4, Exercice A.2.22

$$x = 0 \Rightarrow u = 1, \;\; x = \pi \Rightarrow u = -1.$$

$$du = -\sin x dx.$$

$$\frac{1}{1+\cos^2 x} = \frac{1}{1+u^2}.$$

Retour à l’exercice ▲

Aide 7, Question 4, Exercice A.2.22

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan}(-1)\right) = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

Retour à l’exercice ▲

Pour que la fonction, dont on cherche une primitive, soit définie (et continue) il faut que

$$2t+1>0 \Longleftrightarrow t>-\frac{1}{2} \Longleftrightarrow t \in \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[= I.$$

Retour à l'exercice ▲

$$x = \sqrt{2t+1} = \phi(t).$$

$$dx = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} dt.$$

ϕ réalise une bijection de $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ dans $J =]0, +\infty[$.

On a

$$t = \phi^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.23

$$F(t) = \int \frac{2t}{\sqrt{2t+1}} dt = \int (x^2 - 1) dx = \frac{x^3}{3} - x + C = \frac{(2t+1)\sqrt{2t+1}}{3} - \sqrt{2t+1} + C = \frac{(2t-2)\sqrt{2t+1}}{3} + C.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.23

Pour que la fonction, dont on cherche une primitive, soit définie (et continue) il faut que

$$e^t - 1 > 0 \Longleftrightarrow t > 0 \Longleftrightarrow t \in]0, +\infty[= I.$$

Retour à l'exercice ▲

$$x = \sqrt{e^t - 1} = \phi(t).$$

$$dx = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t - 1}}\,dt.$$

ϕ réalise une bijection de $I =]0, +\infty[$ dans $J =]0, +\infty[$.

On a

$$e^t = x^2 + 1.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.23

$$e^t = x^2 + 1.$$

$$F(t) = \int \frac{e^t}{(1+e^t)\sqrt{e^t - 1}}\,dt = \int \frac{2}{2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 2, Exercice A.2.23

Effectuer un nouveau changement de variable pour calculer

$$\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx$$

Retour à l'exercice ▲

On pose

$$u = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$dx = \sqrt{2}du$$

$$\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx = \sqrt{2}\int \frac{1}{1+u^2}du = \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 6, Question 2, Exercice A.2.23

On a finalement :

$$x = \sqrt{e^t - 1}$$

$$F(t) = \int \frac{e^t}{(1+e^t)\sqrt{e^t-1}} dt = \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C = \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{e^t-1}}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1a, Exercice A.2.25

Faire un changement de variable en posant

$$x = \sin t.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1a, Exercice A.2.25

$$t = -\frac{\pi}{2} \leftrightarrow x = -1, \;\; t = \frac{\pi}{6} \leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$dx = \cos t\, dt.$$

$$\sqrt{1-x^2} = |\cos t|.$$

Puisque l'on choisit $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$, on a $|\cos t| = \cos t$

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1a, Exercice A.2.25

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt.$$

On linéarise pour obtenir le résultat final.

Retour à l'exercice ▲

$$I_2 = |a| \int \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx$$

Faire un premier changement de variable $t = \frac{x}{a}$, puis un 2ème $t = \sin u$.

Ou poser directement $x = a \sin u$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.25

$$dx = a \cos u \, du.$$

$$u = 0 \leftrightarrow x = 0, \;\; u = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow x = a.$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = |\cos u|.$$

Puisque l'on choisit $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\cos u| = \cos u$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1b, Exercice A.2.25

$$I_2 = |a| a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du.$$

On linéairise pour terminer le calcul.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1c, Exercice A.2.25

Ecrire le trinôme sous la forme $a^2 - x'^2$ afin de se ramener à quelle chose de similaire à I_2.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1c, Exercice A.2.25

$$-x^2+3x-2=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(1-(2x-3)^2\right).$$

$$\sqrt{-x^2+3x-2}=\frac{1}{2}\sqrt{1-(2x-3)^2}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1c, Exercice A.2.25

Faire un premier changement de variable en posant $2x-3=t$, puis un 2ème en posant $t=\sin u$.

Ou poser directement

$$2x-3=\sin u \Leftrightarrow x=\frac{3+\sin u}{2}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1c, Exercice A.2.25

$$dx = \frac{1}{2}\cos u\, du.$$

$$x = 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = -1 \leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2},\ \ x = 2 \Leftrightarrow 2x - 3 = 1 \leftrightarrow u = \frac{\pi}{2}.$$

On continue comme pour I_1 et I_2

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1d, Exercice A.2.25

I_4 est la plus simple des intégrales jusque là calculées dans cet exercice.

Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

La fonction à intégrer peut s'écrire
$$\phi'(x)\sqrt{\phi(x)}.$$
On en connait donc facilement une primitive.

Autre méthode possible, faire un changement de variable simple.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1d, Exercice A.2.25

Poser

$$t = -x^2 + 3x - 2,$$

on a alors

$$dt = (-2x + 3)\,dx$$

Déterminer les bornes en t.

Puis calculer la nouvelle intégrale en t dont la fonction (très simple) à intégrer est $\sqrt{t}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1e, Exercice A.2.25

Puique l'on a su calculer I_3 et I_4, alors on sait calculer I_5.

Il suffit d'écrire I_5 comme une combinaison linéaire d'intégrale du type I_3 et I_4.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1e, Exercice A.2.25

C'est toujours possible d'écrire

$$x = \alpha(-2x + 3) + \beta.$$

Déterminer α et β.

Retour à l'exercice ▲

On obtient

$$I_5 = \alpha \int_1^{\frac{3}{2}} (-2x+3)\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx + \beta \int_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{-x^2+3x-2}\,dx.$$

La première intégrale est I_4, la deuxième se calcule comme I_3.

Terminer les calculs.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2a, Exercice A.2.25

Pour chacune des fonctions il faut que l'expression sous la racine carrée soit positive.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2a, Exercice A.2.25

$$D_1 = \mathbb{R}, D_2 = [-1, 1], D_3 =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2a, Exercice A.2.25

Pour chacune des fonctions faire un changement de variable de telle sorte que l'expression sous la racine carrée s'écrire comme un carré.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 2a, Exercice A.2.25

Pour f_2 un changement classique est

$$x = \sin t, \text{ ou plus précisément } t = \operatorname{Arcsin} x$$

$$x \in D_2 = [-1, 1], \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Quel changement de variable peut-on faire pour f_1 et f_3 ?

Retour à l'exercice ▲

Pour f_1 on peut poser

$$x = \text{ sh } t \Longleftrightarrow t = \text{ Argsh } x.$$

Pour f_3, attention, D_3 est l'union de deux intervalles, on ne peut pas faire le même changement de variable sur chacun d'eux.

Retour à l'exercice ▲

Pour f_3

1. Quand $x \in [1, +\infty[$, on peut poser
$$x = \operatorname{ch} t \text{ ou plus précisément } t = \operatorname{Argch} x.$$
2. Quand $x \in]-\infty, -1]$, on peut poser
$$x = -\operatorname{ch} t \text{ ou plus précisément } t = \operatorname{Argch}(-x).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 7, Question 2a, Exercice A.2.25

Pour f_2, on se ramène au calcul d'une primitive de $g_2(t) = \cos^2 t$. On obtient, après linéarisation,

$$G_2(t) = \frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} + C.$$

On remplace

$$t = \operatorname{Arcsin} x$$

Revoir dans le chapitre 5 comment on évalue $\cos(\operatorname{Arcsin} x)$. Après calculs on obtient $F_2(x)$.

Retour à l'exercice ▲

Pour f_1, on se ramène au calcul d'une primitive de $g_1(t) = \operatorname{ch}^2 t$. On obtient, après linéarisation,

$$G_1(t) = \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{2} + \frac{t}{2} + C.$$

On remplace

$$t = \operatorname{Argsh} x$$

Revoir dans le chapitre 7 comment on évalue $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x)$. Après calculs on obtient $F_1(x)$.

Retour à l'exercice ▲

Pour f_3, il faut distinguer deux cas

1. $x \in [1, +\infty[$.
   On se ramène au calcul d'une primitive de $g_3(t) = \operatorname{sh}^2 t$. On obtient, après linéarisation,
   $$G_3(t) = \frac{\operatorname{sh} 2t}{4} - \frac{t}{2} + C.$$
   On remplace
   $$t = \operatorname{Argch} x$$
   Revoir dans le chapitre 7 comment on évalue $\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x)$. Après calculs on obtient
   $$F_3(x) = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Argch}(x) + C$$
   .
2. $x \in]-\infty, -1]$.
   On pourrait poser $x = -\operatorname{ch} t$ ou plus précisément $t = \operatorname{Argch}(-x)$, et faire un calcul similaire au précédent, mais plus simplement , on peut se ramener directement au cas précédent.
   On pose $u = -x$, donc $du = -dx$ et
   $$F_3(x) = \int \sqrt{x^2-1}\,dx = -\int \sqrt{u^2-1}\,du = -\frac{u\sqrt{u^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Argch} u + C = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Argch}(-x) + C.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.25

$$D_4 = [-a, a].$$

Pour calculer F_4, faire un changement de variable afin de se ramener à F_2.

Retour à l'exercice ▲

Le trinôme sous la racine carrée doit être positif ou nul.

$$D_5 = D_6 = D_7 = [1, 2].$$

Retour à l'exercice ▲

Pour F_5, faire un changement de variable pour se ramener à F_2.

Retour à l'exercice ▲

$$-x^2+3x-2=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-(2x-3)^2\right).$$

On retrouve bien sûr le domaine de définition de f_5.

$$-1\leq 2x-3\leq 1\Longleftrightarrow 1\leq x\leq 2.$$

Retour à l'exercice ▲

Pour f_5, s'inspirer de f_2 et poser

$$2x-3=\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Retour à l'exercice ▲

F_6 est très facile à calculer car f_6 est de la forme

$$\phi'(x)\sqrt{\phi(x)}.$$

On obtient donc immédiatement une primitive.

Retour à l'exercice ▲

Aide 6, Question 2c, Exercice A.2.25

On a calculé F_5 et F_6 donc on peut en déduire F_7 qui est une combinaison linéaire de ces 2 fonctions.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2d, Exercice A.2.25

$$D_8 = \left[1-\sqrt{7},\ 1+\sqrt{7}\right].$$

Pour F_8, faire un changement de variable pour se ramener à F_2.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2e, Exercice A.2.25

$$D_9 = \mathbb{R}.$$

$$x^2 + 2x + 6 = (x+1)^2 + 5.$$

Faire un changement de variable pour se ramener à F_1.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2f, Exercice A.2.25

$$D_{10} =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[.$$

$$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1.$$

Faire un changement de variable pour se ramener à F_3.

Retour à l'exercice ▲

Faire une figure.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.26

Pour des raisons de symétrie, l'aire est égale à 2 fois l'aire de D_+, la partie du domaine située à $y \geq 0$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.26

$$(x, y) \in D_+ \Leftrightarrow -1 \le x \le \frac{1}{2},\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}.$$

L'aire de D_+ se calcule donc à l'aide d'une intégrale simple.

Retour à l'exercice ▲

$$A_1 = 2\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Faire un changement de variable pour calculer cette intégrale.

Retour à l'exercice ▲

Revoir l’intégrale I_1 de l’exercice A.2.25.

Retour à l’exercice ▲

Faire une figure.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.26

$$A_2 = 2\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Faire un changement de variable pour calculer cette intégrale.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.26

Poser

$$x = \text{sh } t.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 2, Exercice A.2.26

On trouve

$$\mathrm{ch}\,(\,\mathrm{Argsh}\ 1) + \ \mathrm{Argsh}\ 1.$$

Revoir les propriétés de fonctions trigonométriques hyperboliques et de leurs réciproques afin d'obtenir

$$A_2 = \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.26

Faire une figure.

Retour à l'exercice ▲

$$A_3 = 2\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx.$$

Faire un changement de variable pour calculer cette intégrale.

Retour à l'exercice ▲

Poser

$$x = \operatorname{ch} t.$$

Retour à l’exercice ▲

Aide 4, Question 3, Exercice A.2.26

On trouve

$$2\,\mathrm{sh}\,(\,\mathrm{Argch}\,2) - \,\mathrm{Argch}\,2.$$

Revoir les propriétés de fonctions trigonométriques hyperboliques et de leurs réciproques afin d'obtenir

$$A_3 = 2\sqrt{3} - \ln(2+\sqrt{3}).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.27

1. (a) $\ln\left|\dfrac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$, $\ln|\tan\frac{x}{2}|+C$,

   (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\frac{x}{2})+C$, $-\frac{1}{4\sin^4 x}+\frac{1}{2\sin^2 x}+C$

2. $\tan x - x + C$, $\tan x + C$, $-\frac{1}{tanx}+C$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$, $\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\left(\dfrac{a\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{a^2-1}}\right)+C$, $\frac{1}{2}\tan^2 x+C$, $x-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\frac{x}{2})$ C, $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{4}\ln|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}|+C$, $\sin x-\frac{2}{\sin x}-6\arctan(\sin x)+C$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.28

Voir le cours.

Retour à l'exercice ▲

Chacun des calculs est simple.

Retour à l’exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.31

— Pour la première fonction, la fonction cosinus est élevée à une puissance IMPAIRE.
On peut donc faire un changement de variable $t = \sin x$.
On se ramème au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en t.

— Pour la deuxième fonction, on peut écrire

$$\tan^2 x = 1 + \tan^2 x - 1.$$

D'où les primitives très simples.

— Pour la troisième fonction, quelle est la dérivée de la fonction $\tan x$?
Là encore le calcul de primitive est immédiat.

Retour à l'exercice ▲

Le calcul de primitive est moins simple que les précédents.

Effectuer le changement de variable proposé.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.31

— Pour la première fonction on obtient :
$$2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-t^2}\,dt.$$
Décomposer en éléments simples puis calculer les primitives, puis revenir à la variable x.

— Pour la deuxième fonction on obtient :
$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{t}\,dt.$$
Calculer les primitives, puis revenir à la variable x.

— Pour la troisième fonction on obtient :
$$\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,dt.$$
Calculer les primitives, puis revenir à la variable x.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.32

Rechercher la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène :

$$2y'(x) + 3y(x) = 0$$

Puis pour les équations avec second membre, rechercher une solution particulière de l'équation avec second membre, il y a des solutions particulières simples, réfléchissez!

Retour à l'exercice ▲

Rechercher la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène.

Puis rechercher une solution particulière de l'équation avec second membre, réfléchir à la forme de cette solution particulière.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.32

Lorsque l'équation différentielle s'écrit

$$y'(x) + b(x)y(x) = f(x),$$

on se place sur un INTERVALLE I sur lequel les fonctions b et f sont continues.

Retour à l'exercice ▲

Dans chacun des cas voici les intervalles :

—
$$I =]-\infty, 0[\quad \text{ou} \quad I =]0, +\infty[.$$

—
$$I =]-\infty, 0[\quad \text{ou} \quad I =]0, +\infty[.$$

—
$$I =]-\infty, 0[\quad \text{ou} \quad I =]0, +\infty[.$$

—
$$I =]-\infty, 0[\quad \text{ou} \quad I =]0, 1[\quad \text{ou} \quad I =]1, +\infty[.$$

—
$$I =]-\infty, 0[\quad \text{ou} \quad I =]0, +\infty[.$$

Retour à l'exercice ▲

Rechercher la solution générale des équations différentielles linéaires homogènes.

Puis rechercher une solution particulière des équations avec second membre,on pourra utiliser la méthode de variation de la constante

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 3, Exercice A.2.32

Dans la recherche de la solution générale de l'équation homogène ou dans le cas de la méthode de variation de la constante, on est amené à un calcul de primitive.

Quand il s'agit d'une fraction rationnelle, penser à la décomposition en éléments simples.

Quand c'est judicieux penser à une intégration par parties.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.33

Sur quel intervalle la solution est-elle définie ?

Déterminer la solution générale de l'équation homogène.

Faire varier la constante pour obtenir une solution particulière de l'équation avec second membre.

En déduire la solution générale de l'équation avec second membre.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.33

Les différentes fonctions sont continues sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, on va donc résoudre sur ces intervalles.

Lors de la méthode de variation de la constante "$k(x)$", vérifier que dans l'équation les termes en $k(x)$ se simplifient. Si ce n'est pas le cas, on a fait une erreur. Peut-être dans l'expression de la solution générale de l'équation homogène ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.33

On obtient très facilement $y_h(x)$, puis $k'(x) = e^{2x}$.

Ce qui permet de terminer les calculs, vérifier la réponse.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.33

Sur quel intervalle la solution est-elle définie ?

Déterminer la solution générale de l'équation homogène.

Faire varier la constante pour obtenir une solution particulière de l'équation avec second membre.

En déduire la solution générale de l'équation avec second membre.

Retour à l'exercice ▲

Les différentes fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$, on va donc résoudre sur $\mathbb{R}$.

Lors de la méthode de variation de la constante "$k(x)$", vérifier que dans l'équation les termes en $k(x)$ se simplifient. Si ce n'est pas le cas, on a fait une erreur. Peut-être dans l'expression de la solution générale de l'équation homogène ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.33

On obtient très facilement $y_h(x)$, puis

$$k'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Comment calculer $k(x)$?

Retour à l'exercice ▲

En général, lorsque l'on a une fraction rationnelle dans laquelle la variable est e^x, la primitive se calcule en effectuant le changement de variable $t = e^x$.

Ne pas oublier de calculer dt.

Faire ce changement de variable, on débouche sur le calcul de la primitive d'une fraction rationnelle en t, on sait faire.

Conduire le calcul jusqu'au bout pour obtenir $k(x)$.

Maintenant regarder plus attentivement $k'(x)$ et constater que dans le cas particulier ici, on

$$k'(x) = \frac{\phi'(x)}{\phi(x)},$$

ce qui permet d'obtenir $k(x)$ rapidement.

Comparer les expressions obtenues par les deux méthodes et constater qu'elles sont égales.

Retour à l'exercice ▲

Aide 5, Question 2, Exercice A.2.33

$k(x)$ obtenu d'une façon ou d'une autre permet d'obtenir y_p, on connait y_h, on en déduit la solution générale $y = y_h + y_p$. Comparer avec la solution affichée.

Retour à l'exercice ▲

Sur quel intervalle la solution est-elle définie ?

Déterminer la solution générale de l'équation homogène.

Faire varier la constante pour obtenir une solution particulière de l'équation avec second membre.

En déduire la solution générale de l'équation avec second membre.

Retour à l'exercice ▲

Après normalisation, les différentes fonctions sont continues sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, on va donc résoudre sur ces intervalles.

Lors de la méthode de variation de la constante $k(x)$, vérifier que dans l'équation les termes en $k(x)$ se simplifient. Si ce n'est pas le cas, on a fait une erreur. Peut-être, dans l'expression de la solution générale de l'équation homogène ?

Retour à l'exercice ▲

On obtient très facilement $y_h(x)$, puis $k'(x) = 1$.

Ce qui permet de terminer les calculs, vérifier la réponse.

Retour à l'exercice ▲

Existe-t-il une solution qui soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?

Retour à l'exercice ▲

Aide 5, Question 3, Exercice A.2.33

Il faut prendre $C_1 = C_2 = 0$, on obtient la solution définie sur $\mathbb{R}$ $y(x) = e^{-3x}$, on a alors $y(0) = 1$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.34

Mettre toutes les fractions au même dénominateur

Retour à l’exercice ▲

On obtient
$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{(a+b+c)x^2+(b-c)x-a+b-c}{x(x^2-1)}.$$
Il suffit ensuite d'identifier les coefficients du polynôme au numérateur

Retour à l'exercice ▲

On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rl} a+b+c & =0, \\ b-c & =0, \\ -a+b-c & =1, \end{array}\right.$$

Retour à l'exercice ▲

Sur quel intervalle la solution est-elle définie ?

Déterminer la solution générale de l'équation homogène.

Faire varier la constante pour obtenir une solution particulière de l'équation avec second membre.

En déduire la solution générale de l'équation avec second membre.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.34

On peut poser l'équation non-homogène

$$y' = -\frac{2}{x(x^2-1)}\,y + \frac{x}{x^2-1}$$

au choix, sur l'un des intervalles

$$I_1 =]-\infty, -1[,\ \ I_2 =]-1, 0[,\ \ I_3 =]0, 1[,\ \ I_4 =]1, +\infty[.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.34

On a $a(x) = -\dfrac{2}{x(x^2-1)}$ qui admet pour primitive, en utilisant la question 1

$$A(x) = \ln\left|\frac{x^2}{x^2-1}\right|,$$

ce qui donne pour solution de l'équation homogène

$$y_h(x) = C\frac{x^2}{x^2-1}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 2, Exercice A.2.34

Avec la méthode de variation de la constante on obtient la solution particulière

$$y_p(x) = \frac{x^2}{x^2-1}\ln|x|.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.35

On trouve facilement $a = 3$.

Retour à l'exercice ▲

Il suffit de calculer $y'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x - \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{1}{z^2}$ puis de remplacer y' et y dans l'équation (E), puis de multiplier l'équation obtenue par z^2.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.35

La solution générale de l'équation homogène est donnée par $z_h(x) = C\frac{e^{-3x^2}}{x}$ et on obtient $z_p(x) = \frac{1}{6x}$ en utilisant la méthode de variation de la constante, qe qui donne

$$z(x) = C\frac{e^{-3x^2}}{x} + \frac{1}{6x}.$$

On en déduit facilement y.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.35

Puisque $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$, on obtient

$$y(x) = 3x - \frac{x}{Ce^{-3x^2} + \frac{1}{6}}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.36

Il s'agit d'une équation de Bernoulli.

Faire le changement de fonction inconnue permettant de se ramener à une équation linéaire.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.37

Il s'agit d'une équation de Riccati.

Faire le changement de fonction inconnue permettant de se ramener à une équation de Bernoulli.

Retour à l'exercice ▲