# Exercices du chapitre 7 avec corrigé succinct

**Exercice VII.1** Ch7-Exercice1

Montrer qu'une fonction constante sur $[a,b]$ est étagée.

**Solution :** Si $f$ est une fonction constante sur $[a,b]$, alors il existe bien une subdivision de $[a,b]$, à savoir la subdivision $a = x_0 < x_1 = b$, telle que $f$ soit constante sur chacun des sous-intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ de la subdivision.

---

**Exercice VII.2** Ch7-Exercice2

Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \\ 2, & \text{si } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Montrer que cette fonction est étagée en donnant au moins deux subdivisions adaptées.

**Solution :** La subdivision $0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2$ convient. En effet, $f$ est constante, égale à 3 sur $]0,1[$ et constante, égale à 2 sur $]1,2[$.
Toute subdivision plus fine convient aussi. C'est le cas par exemple de la subdivision
$0 = x_0 < 0.5 = x_1 < 1 = x_2 < 4/3 = x_3 < 2 = x_4$.

---

**Exercice VII.3** Ch7-Exercice3

à l'aide de la définition de l'intégrale des fonctions étagées, calculer $\int_a^b m\,dt$ (où $m$ est un réel donné) et $\int_0^2 f(t)\,dt$ où $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \\ 2, & \text{si } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

**Solution :** La fonction constante et égale à $m$ sur tout son intervalle de définition est une fonction étagée. Nous l'avons vu plus haut. Une subdivision adaptée est la subdivision $a = x_0 < x_1 = b$. Il en résulte que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = m(x_1 - x_0) = m(b-a).$$

Nous avons aussi vu à l'exercice précédent que la fonction $f$ est étagée : nous avons même exhibé deux subdivisions adaptées. Il en résulte que :

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 3(1-0) + 2(2-1) = 3(\frac{1}{2} - 0) + 3(1 - \frac{1}{2}) + 2(\frac{4}{3} - 1) + 2(2 - \frac{4}{3}) = 5.$$

Notons que les valeurs de $f$ aux points de subdivisions ne joue aucun rôle dans le calcul de la valeur de l'intégrale.

---

**Exercice VII.4** Ch7-Exercice4

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est nulle sauf en un nombre fini de points. Montrer que $\int_a^b f(t)\,dt = 0$.

**Solution :** Prenons comme subdivision associée à $f$, outre les points $a$ et $b$ les points, en nombre fini, où $f$ est non nulle. Alors, sur chaque sous-intervalle $]x_{i-1}, x - i[$ de cette subdivision, $f$ est nulle, de sorte que son intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} 0(x_i - x_{i-1}) = 0,$$

est nulle.

---

**Exercice VII.5** Ch7-Exercice5

Soient $f$ une fonction étagée et $\lambda$ un réel. Montrer, en utilisant la définition, que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$.

**Solution :** Si $f$ est constante (égale à $m_i$) sur un sous-intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, $\lambda f$ l'est aussi (elle est égale à $\lambda m_i$). Toute subdivision adaptée à $f$ l'est donc aussi à $\lambda f$ et l'on a :

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} (\lambda m_i)(x_i - x_{i-1}) = \lambda \left( \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \right) = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

---

**Exercice VII.6** Ch7-Exercice6

Montrer que si deux fonctions étagées diffèrent en un nombre fini de points sur un intervalle $[a, b]$ elles ont la même intégrale sur cet intervalle.

**Solution :** Les fonctions $f$ et $g$ ne différant qu'en un nombre fini de points, leur différence $f - g$ est nulle, sauf en un nombre fini de points. Nous avons vu plus haut, que cela entraî ne que son intégrale est nulle, soit :

$$\int_a^b (f-g)(x)\,dx = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

---

**Exercice VII.7** Ch7-Exercice7

Montrer qu'une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$ est bornée.

**Solution :** Une fonction étagée sur $[a, b]$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs est bornée. Or une fonction $f$ intégrable sur $[a, b]$ est encadrée, par définition, par deux fonctions étagées, donc encadrée par deux fonctions bornées sur $[a, b]$. Elle est donc bornée sur $[a, b]$.

---

**Exercice VII.8** Ch7-Exercice8

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $u$ et $U$ deux fonctions étagées telles que $u \le f \le U$. Déduire de la définition de l'intégrale de $f$ que
$\int_a^b u(t)\,dt \le \int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b U(t)\,dt$.

**Solution :** La fonction $f$ étant intégrable, son intégrale existe et est définie par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf_{U : f \le U} \int_a^b U(x)\,dx = \sup_{u : u \le f} \int_a^b u(x)\,dx,$$

de sorte que l'on a bien

$$\int_a^b u(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b U(x)\,dx.$$

---

**Exercice VII.9** Ch7-Exercice9

Démontrer la relation de Chasles pour les fonctions intégrables. (on s'inspirera de la démonstration de cette propriété pour les fonctions étagées.)

**Solution :** Soit $c \in ]a, b[$. Soit $u$ une fonction étagée sur $[a, b]$. Alors les fonctions $u_1$ et $u_2$ définies par :

$$u_1(x) = \begin{cases} u(x), & \text{pour } a \leq x \leq c, \\ 0, & \text{pour } c < x \leq b, \end{cases} \qquad u_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } a \leq x \leq c, \\ u(x), & \text{pour } c < x \leq b, \end{cases}$$

sont clairement étagées. Soient $f_1$ et $f_2$ définies à partir de $f$ de la même manière. Donnons nous un $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors, $f$ étant intégrable, il existe deux fonctions étagées $s$ et $S$ telles que

$$s \leq f \leq S \quad \text{et} \quad \int_a^b (S - s)(x)\, dx \leq \varepsilon.$$

Alors, nous voyons que

$$\begin{array}{lcl} s_1 \leq f_1 \leq S_1 & \text{et} & \int_a^b (S_1 - s_1)(x)\, dx \leq \varepsilon, \\ s_2 \leq f_2 \leq S_2 & \text{et} & \int_a^b (S_2 - s_2)(x)\, dx \leq \varepsilon, \end{array}$$

ce qui montre que $f_1$ et $f_2$ sont intégrables. Le résultat s'en déduit aussitôt, puisque $f = f_1 + f_2$.

---

**Exercice VII.10** Ch7-Exercice10

Soit la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $\frac{1}{2}x \leq f(x) \leq 2x$, $\forall x \in [0, 1]$. Donner un encadrement pour $\int_0^1 f(x)\, dx$.

**Solution :** On a les inégalités

$$\frac{x}{2} \leq f \leq 2x,$$

Nous avons montré dans le paragraphe (Fonction intégrable - définition) que

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

donc

$$\int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4}, \int_0^1 2x dx = 1$$

nous déduisons que :

$$\frac{1}{4} = \int_0^1 \frac{x}{2}\, dx \leq \int_0^1 f(x)\, dx \leq \int_0^1 2x\, dx = 1.$$

---

**Exercice VII.11** Ch7-Exercice11

Soit une fonction $f$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x = 1, \\ 2, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Cette fonction est-elle intégrable sur $[0, 2]$ ? Calculer alors son intégrale.

**Solution :** Sur $[0, 1[$ $x/2$ est intégrable, d'intégrale $1/4$. Sur $]1, 2]$, la fonction 2 est intégrable, d'intgrale 3. La relation de Chasle nous permet alors d'affirmer que la fonction $f$ est intégrable sur $[0, 2]$, d'intégrale $9/4$.

---

**Exercice VII.12** Ch7-Exercice12

Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$. Par quelle intégrale peut-on calculer l'aire comprise entre l'axe des $x$ et le graphe de $f$ ?

**Solution :** Cette aire est calculée par l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = 2.$$

---

**Exercice VII.13** Ch7-Exercice13

Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = 0$ sur $[0, 1[\cup]1, 2]$ et $f(1) = 1$. Cette fonction est-elle nulle sur $[0, 2]$ ? Que vaut $\int_0^2 f(x)\, dx$ ? Nous avons pourtant démontré que "si l'intégrale d'une fonction positive est nulle, cette fonction est nulle". Où est la contradiction ?

**Solution :**

1. Non, cette fonction n'est pas nulle sur l'intervalle $[0, 2]$, puisqu'elle est égale à 1 au point $x = 1$.
2. Son intégrale se calcule par
$$\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 f(x)\, dx = 0 + 0 = 0$$
3. Non, il n'y a pas de contradiction avec le théorème cité, car la fonction $f$ de l'exercice n'est pas continue. Si nous reprenons la démonstration du théorème, nous voyons que le point clé est que $f(1) \neq 0$ et pourtant, il n'existe pas de sous-intervalle $[1-\eta, 1+\eta]$ où $f$ soit non nulle en tout point.

---

**Exercice VII.14** Ch7-Exercice14

Montrer en reprenant la démonstration de la proposition (7.1.7) que, pour $h < 0$, on a

$$\lim_{\substack{h \to 0, \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)\, dx = f(a).$$

**Solution :** Pour $h$ négatif, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)\, dx = \frac{1}{-h} \int_{a+h}^{a} f(x)\, dx.$$

Posons alors $\delta = -h$. Alors $\delta$ est positif et nous devons calculer la limite, lorsque $\delta > 0$ tend vers 0 de

$$\frac{1}{\delta} \int_{a-\delta}^{a} f(x)\, dx.$$

La démonstration se poursuit ensuite comme celle de la proposition 7.1.6, avec cette fois-ci les quantités

$$m(\delta) = \min_{a-\delta \leq x \leq a} f(x) \text{ et } M(\delta) = \max_{a-\delta \leq x \leq a} f(x).$$

---

**Exercice VII.15** Ch7-Exercice15

Calculer $\int_0^x t^2\, dt$, $\int_1^x t^2\, dt$.

**Solution :** Le théorème fondamental de l'analyse nous permet d'exprimer ces intégrales à l'aide d'une primitive de $t^2$. Il vient ainsi

$$\int_0^x t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}.$$

De même

$$\int_1^x t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

---

**Exercice VII.16** Ch7-Exercice16

Appliquer le premier théorème de la moyenne à $\int_0^\pi \sin x\,dx$. Appliquer le deuxième théorème de la moyenne à $\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx$, où $f$ est une fonction continue sur $[0,\pi]$ donnée.

**Solution** :

1. $$\int_0^\pi \sin x\,dx = \pi\sin(\theta\pi),\ \text{avec}\ \theta\in]0,1[.$$

2. Comme la fonction sinus garde un signe constant sur l'intervalle $[0,\pi]$, nous pouvons utiliser le deuxième théorème de la moyenne, ce qui donne
$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = f(\theta_f\pi)\int_0^\pi \sin x\,dx,\ \text{avec}\ \theta_f\in]0,1[.$$
Enfin, nous avons déjà calculé cette dernière intégrale (exercice A.1.12), ce qui donne
$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = 2f(\theta_f\pi).$$

---

**Exercice VII.17** Ch7-Exercice17

Donner l'inégalité de Cauchy-Schwartz lorsque la fonction $f$ est constante
$(f(x)=\alpha,\ \forall x\in[a,b])$.

**Solution** : L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit dans ce cas
$$\left|\int_a^b \alpha g(x)\,dx\right|^2 \le \left(\int_a^b \alpha^2\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$
d'où
$$\alpha^2\left|\int_a^b g(x)\,dx\right|^2 \le (b-a)\,\alpha^2\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$
soit, après simplification par $\alpha^2$
$$\left|\int_a^b g(x)\,dx\right|^2 \le (b-a)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$

---

**Exercice VII.18** Ch7-Exercice18

1. On suppose $f$ croissante sur un intervalle $[a,b]$, on définit $h=\frac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$, en s'inspirant du document B.1.5 sur l'intégrabilité des fonctions monotones, donner deux fonctions étagées $s_n$ et $S_n$ telles $s_n\le f\le S_n$.
2. Calculer
$$\int_a^b s_n(x)dx,\ \int_a^b S_n(x)dx,\ \int_a^b (S_n(x)-s_n(x))dx$$
3. En déduire une majoration de l'erreur correspondante.

**Solution** : Donnons nous une subdivision de l'intervalle $[a,b]$, en $n$ sous-intervalles, à l'aide de points $x_i=a+i(b-a)/n$, $i=0,\dots,n$. Nous construisons deux familles de fonctions étagées $s_n$ et $S_n$, par
$$\begin{cases}\forall x\in[x_i,x_{i+1}[, & s_n(x)=f(x_i),\\ s_n(b)=f(b), & \end{cases}\qquad \begin{cases}\forall x\in]x_i,x_{i+1}], & S_n(x)=f(x_{i+1}),\\ S_n(a)=f(a), & \end{cases}$$
où $i$ varie de 0 à $n-1$.

Les fonctions étagées $s_n$ et $S_n$ encadrent alors $f$ et l'on a

$$\int_a^b s_n(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad \int_a^b S_n(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}),$$

l'intégrale de $f$ est encadrée par celles de $s_n$ et $S_n$.

$$\int_a^b s_n(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b S_n(x)\,dx$$

$$\int_a^b (S_n - s_n)(x)\,dx = \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)),$$

On obtient une majoration de l'erreur par

$$\int_a^b (f - s_n(x))\,dx \le \int_a^b (S_n - s_n)(x)\,dx, \ \int_a^b (S_n(x) - f(x))\,dx \le \int_a^b (S_n - s_n)(x)\,dx$$

---

**Exercice VII.19** Ch7-Exercice19

En se servant du théorème fondamental de l'analyse calculer les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx, \quad \int_0^1 x^n\,dx, \quad \int_0^1 x\sqrt{x}\,dx, \quad \int_1^e \frac{1}{x}\,dx.$$

**Solution** :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = (-\cos\frac{\pi}{2}) - (-\cos 0) = 1, \quad \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}x\,dx = \left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5}, \quad \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \ln e - \ln 1 = \ln e = 1.$$

---

**Exercice VII.20** Ch7-Exercice20

Calculer les intégrales

$$\int_a^b \ln x\,dx, \quad \int_a^b x^2 e^x\,dx$$

**Solution** :

1. Posons $u' = 1$, $v = \ln x$, d'où $u = x$, $v' = 1/x$. Il vient alors

$$\int_a^b \ln x\,dx = [x\ln x]_a^b - \int_a^b \frac{x}{x}\,dx = b\ln b - a\ln a - (b-a).$$

2. On fait deux intégrations par parties successives, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2 e^x\,dx &= [x^2e^x]_a^b - \int_a^b 2xe^x\,dx && (1.1)\\
&= [x^2e^x]_a^b - [2xe^x]_a^b + \int_a^b 2e^x\,dx && (1.2)\\
&= [x^2e^x - 2xe^x + 2e^x]_a^b && (1.3)\\
&= e^b(b^2-2b+2) - e^a(a^2-2a+2). && (1.4)
\end{aligned}$$

---

**Exercice VII.21** Ch7-Exercice21

Calculer les intégrales
$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx, \quad \int_0^1 \operatorname{Arctan} x\,dx, \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}\,dx.$$

**Solution** :

1. La première intégrale se calcule par changement de variable. Posons
$$t = \varphi(x) = x^2,$$
$$dt = 2x dx,$$
pour $x = 0$, on a $t = 0$, pour $x = 1$, on a $t = 1$.
$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\left[\ln|1+t|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$
2. La deuxième intégrale s'obtient en intégrant par parties. Posons $u' = 1$ et $v = \operatorname{Arc}\tan x$. Il vient $u = x$ et $v' = 1/(1+x^2)$, d'où
$$\int_0^1 \operatorname{Arctan} x\,dx = [x\operatorname{Arc}\tan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$
3. La troisième intégrale s'obtient par changement de variable. Posons
$$t = \varphi(x) = \operatorname{Arc}\tan(x),$$
$$dt = \frac{dx}{1+x^2},$$
pour $x = 0$, on a $t = 0$, pour $x = 1$, on a $t = \frac{\pi}{4}$.
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,dt = \frac{\pi^2}{32}.$$

---

**Exercice VII.22** Ch7-Exercice22

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln|x|$.

**Solution** :

1. Lorsque $x$ est positif, $\ln|x| = \ln x$. Sa dérivée est donc $1/x$.
2. Lorsque $x$ est négatif, $\ln|x| = \ln(-x)$. Sa dérivée est donc $(-1)/(-x) = 1/x$.

---

**Exercice VII.23** Ch7-Exercice23

Démontrer le corollaire (7.3.1).

**Solution** :

1. (i) On écrit que
$$b \times \frac{a}{b} = a, \text{ de sorte que } \ln b + \ln\frac{a}{b} = \ln a.$$
2. (ii) Par récurrence .
$$\ln(\prod_{i=1}^{1} a_i) = \ln a_1 = \sum_{i=1}^{1} \ln a_i.$$
Supposons la proposition vraie pour $q \geq 1$, alors
$$\ln(\prod_{i=1}^{q+1} a_i) = \ln((\prod_{i=1}^{q} a_i)a_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q} \ln a_i + \ln a_{q+1} = \sum_{i=1}^{q+1} \ln a_i.$$

3. (iii) On utilise ce qui précède avec $a_i = a, i = 1, \ldots, p$.
4. (iv) Si $p$ est négatif, $p = -q, a^p = \frac{1}{a^q}$, donc
$$\ln a^p = -\ln a^q = -q \ln a = p \ln a$$
5. (v) Il suffit de poser $a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q$ donc
$$\ln a = q \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right).$$
6. (vi) Si $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}$, alors $a^x = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$, donc
$$\ln a^x = p \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{p}{q} \ln a = x \ln a$$

---

**Exercice VII.24** Ch7-Exercice24

1. Pour $x$ réel positif, $p$ et $q$ entiers, on définit la fonction $x \mapsto x^{1/q}$ comme étant la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^q$. Montrer que
$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = (x^p)^{\frac{1}{q}} \overset{\text{Déf}}{=} x^{\frac{p}{q}}$$
2. Montrer que
$$exp(\frac{p}{q}) = e^{\frac{p}{q}}.$$

**Solution** :

1. $$\left\{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right\}^q = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{pq} = \left\{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right\}^p = x^p = \left\{(x^p)^{\frac{1}{q}}\right\}^q,$$
d'où l'on déduit par passage à la fonction réciproque
$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = (x^p)^{\frac{1}{q}},$$
ce qui permet de donner un sens à l'expression $x^{p/q}$.
2. $$\ln \exp(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} = \frac{p}{q} \ln e = \ln e^{\frac{p}{q}}$$

---

**Exercice VII.25** Ch7-Exercice25

Soient $a$ et $x$ deux réels.

1. Montrer que
$$\operatorname{ch}(a+x) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} x.$$
2. En déduire par dérivation que
$$\operatorname{sh}(a+x) = \operatorname{ch} a \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} x.$$

**Solution** :

1. On développe le second membre en remplaçant les cosinus et sinus hyperboliques par leurs expressions en fonction de $e^a$, $e^{-a}$, $e^x$ et $e^{-x}$.
2. Il suffit de dériver par rapport à $x$ la relation précécente.

---

**Exercice VII.26** Ch7-Exercice26

Soit $a$ un réel strictement positif, $x$ et $y$ deux réels quelconques, montrer que

$$a^{x+y} = a^x + a^y, \qquad a^{xy} = \left(a^x\right)^y = \left(a^y\right)^x.$$

**Solution** :

1. $$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} = e^{x\ln a}e^{y\ln a} = a^x a^y$$

2. $$(a^x)^y = (e^{x\ln a})^y = e^{y\ln(e^{x\ln a})} = e^{yx\ln a} = a^{xy}.$$

---

**Exercice VII.27** Ch7-Exercice27

Récapituler, les extensions successives de la fonction $x^\alpha$, $x$ étant un réel positif et $\alpha$ étant un entier positif, un entier négatif, un rationnel, un réel.

**Solution** :

1. Pour $m$ entier positif ou nul, on pose $x^0 = 1$, puis $x^{m+1} = x^m x$.
2. Pour $m$ entier négatif, on pose $x^m = 1/x^{-m}$.
3. Pour $m$ entier, on définit $x^{1/m}$ comme fonction réciproque de $x^m$.
4. Pour $r = p/q$, rationnel, on définit $x^r$, comme expliqué dans l'exercice A.1.24.
5. Pour $y$ réel, on définit $x^y$ par $e^{x\ln y}$.

à chaque étape, on vérifie que

1. La nouvelle définition est une extension des précédentes, c'est-à-dire, par exemple, que pour $\alpha = r$, la définition de $x^\alpha$, pour $\alpha$ réel, redonne bien $x^r$ pour $r$ rationnel.
2. Les règles de calcul sont bien conservées, c'est-à-dire que

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}.$$

---

**Exercice VII.28** Ch9-Exercice3

Soit l'équation différentielle $y'(x) = a(x)y(x)$ et soient $A$ et $\hat{A}$ deux primitives de $a(x)$. Donner les solutions en fonction de $A$ puis de $\hat{A}$ et montrer que "changer de primitive revient à changer de constante".

**Solution** : Les solutions s'écrivent respectivement

$$y(x) = Ce^{A(x)}, \text{ et } y(x) = \hat{C}e^{\hat{A}(x)}.$$

Or, puisque $A$ et $\hat{A}$ sont deux primitives de $a(x)$, on a

$$\hat{A}(x) = A(x) + \lambda.$$

On obtient donc

$$y(x) = \hat{C}e^{\lambda}e^{A(x)}.$$

On obtient donc les solutions en fonction de $A$ mais avec une constante "différente", ce qui redonne évidemment les mêmes solutions puisque les constantes peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle.

---

**Exercice VII.29** Ch9-Exercice4

Montrer que l'unique solution de

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

s'écrit

$$y(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)}.$$

En déduire que si une solution de $y'(x) = a(x)y(x)$ s'annule en un point, elle est identiquement nulle.

**Solution :** La solution générale de $y'(x) = a(x)y(x)$ s'écrit $y(x) = Ce^{A(x)}$. Si on utilise la condition $y(x_0) = y_0$, on obtient

$$Ce^{A(x_0)} = y_0$$

ce qui donne

$$C = y_0 e^{-A(x_0)},$$

que l'on remplace dans la solution

$$y(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)}.$$

Si une solution s'annule en un point, cela signifie qu'il existe $x_0$ tel que $y(x_0) = 0$. On obtient donc pour solution $y(x) = 0$.

---

**Exercice VII.30** Ch9-Exercice6

Calculer

$$S(x) = \int e^{-2x} \sin \omega x \, dx.$$

En déduire la solution générale de

$$y'(x) = 2y(x) + \sin \omega x.$$

**Solution :** Le calcul des primitives se fait par intégration par parties :

$$\begin{aligned} S(x) &= e^{-2x}\left(-\frac{\cos \omega x}{\omega}\right) - \int (-2)e^{-2x}\left(-\frac{\cos \omega x}{\omega}\right) dx, \\ &= -\frac{1}{\omega} e^{-2x} \cos \omega x - \frac{2}{\omega} e^{-2x} \frac{\sin \omega x}{\omega} + \frac{2}{\omega} \int (-2) e^{-2x} \frac{\sin \omega x}{\omega} \, dx, \\ &= -\frac{1}{\omega} e^{-2x} \cos \omega x - \frac{2}{\omega^2} e^{-2x} \sin \omega x - \frac{4}{\omega^2} S(x). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$S(x) = -\frac{2}{\omega^2+4} e^{-2x} \sin \omega x - \frac{\omega}{\omega^2+4} e^{-2x} \cos \omega x.$$

Dans l'exercice , vous avez montré que la solution de l'équation homogène, associée à

$$y'(x) = 2y(x) + \sin \omega x$$

est

$$y_h(x) = Ce^{2x}.$$

Pour obtenir la solution générale, on va utiliser

$$S(x) = \int e^{-2x} \sin \omega x \, dx.$$

La solution générale est

$$y(x) = (S(x) + C)e^{2x}$$

soit

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{2}{\omega^2+4} \sin \omega x - \frac{\omega}{\omega^2+4} \cos \omega x.$$

---

**Exercice VII.31** Ch9-Exercice7

Donner une solution particulière (évidente) de

$$y'(x)\cos x + y(x)\sin x = 1.$$

En déduire la solution générale de cette équation.

**Solution :** Puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on a donc la solution particulière $y_p(x) = \sin x$. La solution générale est donc

$$y(x) = C\cos x + \sin x,$$

puisque l'on a déjà démontré (voir le paragraphe ) que

$$y_h(x) = C\cos x.$$

---

**Exercice VII.32** Ch9-Exercice12

Utiliser la méthode de variation de la constante pour résoudre

$$y'(x)\cos x + y(x)\sin x = 1.$$

**Solution :** La solution générale (voir le paragraphe ) de l'équation homogène est :

$$y_h(x) = C\cos x.$$

Posons

$$y_p(x) = \phi(x)\cos x$$

et reportons dans l'équation avec second membre, on trouve :

$$\phi'(x)\cos^2 x = 1$$

qui admet comme solution

$$\phi(x) = \tan x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière ($C = 0$) est donc

$$y_p(x) = \tan x \cos x = \sin x.$$

Et la solution générale s'obtient comme la somme de $y_h$ et $y_p$ :

$$y(x) = C\cos x + \sin x.$$

Si l'on considère directement toutes les primitives $\phi$, on obtient

$$y(x) = (\tan x + C)\cos x = \sin x + C\cos x$$

ce qui redonne la solution générale.

---

**Exercice VII.33** Ch9-Exercice13

Calculer, par la méthode de la variation de la constante, une solution particulière de

$$y'(x) = 2y(x) + \sin \omega x.$$

**Solution** : Puisque la solution de l'équation homogène est

$$y_h(x) = Ce^{2x},$$

on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = \phi(x)e^{2x}$$

et on remplace dans l'équation

$$\phi'(x)e^{2x} + \phi(x)2e^{2x} = 2\phi(x)e^{2x} + \sin \omega x$$

soit

$$\phi(x) = \int e^{-2x} \sin \omega x.$$

Ce calcul, comme nous l'avons déjà dit revient au calcul de l'exercice A.1.30.

---

**Exercice VII.34** Ch9-Exercice15

Soit à résoudre l'équation de Bernoulli

$$x^2 y' + y + y^2 = 0.$$

Quel est le changement de fonction inconnue ? Quelle est l'équation différentielle en $z$ ainsi obtenue ? La résoudre et en déduire $y$.

**Solution** : $y = 0$ est solution évidente, cherchons les autres solutions. Puisque $\alpha = 2$, le changement de fonction inconnue est

$$z = \frac{1}{y}$$

ce qui donne l'équation différentielle en $z$ :

$$x^2 z' - z - 1 = 0$$

dont la solution générale est

$$z(x) = Ce^{-1/x} - 1.$$

En effet l'équation homogène a pour solution $z_h(x) = Ce^{-1/x}$ et $z_p(x) = -1$ est une solution particulière évidente. Les solutions de l'équation de Bernoulli sont donc

$$y(x) = \frac{1}{Ce^{-1/x} - 1}, \text{ et } y(x) = 0.$$

---

**Exercice VII.35** Ch9-Exercice16

REsoudre l'équation différentielle de Riccati suivante :

$$y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{1}{x^2}.$$

On vérifiera que $w(x) = \frac{1}{x}$ est une solution particulière.

**Solution** : On pose $u = y - w$ et on obtient l'équation en $u$

$$u' - \frac{u}{x} - u^2 = 0$$

qui est une équation de Bernoulli pour $n = 2$.
On pose alors $z = \frac{1}{u}$ et on obtient l'équation

$$-z' - \frac{z}{x} - 1 = 0$$

qui est une équation différentielle du premier ordre linéaire avec second membre que l'on résout. Tout calcul fait, on trouve

$$y = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 + C}.$$

---