Université de Technologie de Compiègne **MT90**

— CORRIGÉ: MÉDIAN P17 —

Date : 03 Avril 2017

Exercice I (7 points)— Les deux parties I et II sont indépendantes.

I- On considère les propositions suivantes :

(a) $\exists x \in \mathbb{R};\ (x+1=0 \text{ et } x+2=0)$

(b) $(\exists x \in \mathbb{R};\ x+1=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R};\ x+2=0)$

(c) $\exists a \in \mathbb{R}^*,\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$

(d) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R};\ |a| < \varepsilon$

1. Les propositions (a), (b), (c) et (d) sont-elles vraies ou fausses?

La proposition (a) est fausse car x ne peut pas prendre à la fois les valeurs -1 et -2. Par contre la proposition (b) est vraie car elle est la conjonction de deux propositions vraies: il existe une solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x+1=0$ (qui est $x=-1$) et il existe une solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x+2=0$ (qui est $x=-2$).
La proposition (c) est fausse car, par exemple, pour $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$ l'inegalité $|a| < \varepsilon$ est fausse.
(d) est vraie il suffit de prendre $a = 0 < \varepsilon$ qui est toujours vraie.

2. Donner leur négation.

non (a) $\forall x \in \mathbb{R};\ (x+1 \neq 0 \textit{ ou } x+2 \neq 0)$

non (b) $(\forall x \in \mathbb{R};\ x+1 \neq 0)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R};\ x+2 \neq 0)$

non (c) $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \exists \varepsilon > 0,\ |a| \geq \varepsilon$

non (d) $\exists \varepsilon > 0,\ \forall a \in \mathbb{R};\ |a| \geq \varepsilon$

II- Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant: $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante:

P: (Il y a au moins deux de ces réels qui sont distants de moins de $\dfrac{1}{n}$)

1. Ecrire à l'aide des quantificateurs une formule logique équivalente à la propriété P.

$$P : \exists i \in \{0, \ldots, n\}, \exists j \in \{0, \ldots, n\},\ (j < i) \textit{ et } (x_i - x_j) \leq \frac{1}{n}.$$

2. En déduire à partir de P la formule logique suivante

$$P' : \exists i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n}.$$

Il suffit de remarquer que si deux nombres x_i et x_j où $(j < i)$ sont distants de moins de $\frac{1}{n}$, alors il y aura deux nombres consécutifs qui seront distants de moins de $\frac{1}{n}$. En effet $(x_i - x_{i-1}) \leq (x_i - x_j) = (x_i - x_{i-1}) + (x_{i-1} - x_{i-2}) + \ldots + (x_{j-1} - x_j) \leq \frac{1}{n}$. Ceci signifie qu'on a la propriété P'.

3. Ecrire à l'aide des quantificateurs la négation de P'.

$$\textit{Non } P' : \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}.$$

4. Montrer par l'absurde la propriété P.
(**Indication**: on pourra montrer que $x_n - x_0 > 1$).

On suppose qu'on a (non P) et on veut démontrer qu'elle est fausse. Cela revient à dire aussi qu'on a (non P'). En écrivant que $(x_n - x_0) = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_1 - x_0)$ et en utilisant la propriété (non P') on a

$$(x_n - x_0) > n \times \frac{1}{n} = 1,$$

ce qui est absurde car d'après les données $(x_n - x_0) \leq 1$. Donc la propriété P est vraie.

Exercice II (5 points)—

Soit f une application de l'ensemble E dans l'ensemble F. On note A et B deux parties quelconques de E et $f(A) = Imf_{|A}$ (où l'application $f_{|A}$ est la restriction de f à la partie A).

1. Vérifier que si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.

On suppose que $A \subset B$, soit y un élément quelconque de $f(A)$. Par définition de l'ensemble $f(A)$ il existe au moins un élément x dans A tel que $y = f(x)$; or si $(x \in A) \Longrightarrow (x \in B)$ ceci revient à prouver que $y = f(x) \in f(B)$.

2. Déduire que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

D'après la question précédente on a

$$\left.\begin{array}{ccc} (A \cap B) \subset A & \Longrightarrow & f(A \cap B) \subset f(A) \\ & \textit{et} & \\ (A \cap B) \subset B & \Longrightarrow & f(A \cap B) \subset f(B) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

3. On suppose que f est injective. Montrer alors que pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

D'après la question (2.) on a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, pour montrer l'égalité il suffit de montrer l'inclusion $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ lorsque f est injective. Pour tout $y \in f(A) \cap f(B) \Longrightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(B)$ ce qui veut dire que:

$$\exists x_A \in A,\ y = f(x_A) \textit{ et } \exists x_B \in B,\ y = f(x_B).$$

Donc $y = f(x_A) = f(x_B)$, or f est injective alors $x_A = x_B = x \in A \cap B$. On a de ce fait prouver l'existence d'un élément $x \in A \cap B$, $y = f(x)$. Ceci prouve que $y \in f(A \cap B)$ ce qui achève la preuve.

4. On suppose, dans cette question, que pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Par un raisonnement direct montrer que f est injective. (On rappelle que l'image d'une partie non vide par une application, est une partie non vide).

Soient a et b deux éléments quelconques de E vérifiant $\underline{f(a) = f(b)}$, on veut montrer que $a = b$. On considère les parties de E suivantes: $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. D'après l'hypothèse on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Or

$$\begin{aligned} f(A \cap B) = f(\{a\} \cap \{b\}) = f(\{a\}) \cap f(\{b\}) &= \{(f(a)\} \cap \{(f(b)\} \\ &= \{(f(a)\} = \{(f(b)\} = f(A) = f(B) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Il en découle que $f(\{a\} \cap \{b\}) \neq \emptyset \Longrightarrow \{a\} \cap \{b\} \neq \emptyset$ car l'image d'une partie non vide par f est une partie non vide. Ceci permet de conclure que $\underline{a = b}$ et que f est injective.

Exercice III (5 points)—

Soit $A \neq \emptyset$, un sous ensemble borné de $\mathbb{R}$. Posons $B = \{x \in \mathbb{R};\ -x \in A\}$, montrer que :

1. Si M est un majorant de A alors $-M$ est un minorant de B.

   Si M est un majorant de A, alors $x \leq M$ pour tout $x \in A$, par définition d'un majorant. Or $-x \geq -M$ pour tout $x \in A$, et donc $y \geq -M$ pour tout $y \in B$. Ceci montre que $-M$ est un minorant de B.

2. Si m est un minorant de B alors $-m$ est un majorant de A.

   Si m est un minorant de B, alors $x \geq m$ pour tout $x \in B$, par définition d'un minorant. Or $-x \leq -m$ pour tout $x \in B$, donc $y \leq -m$ pour tout $y \in A$. Ceci montre que $-m$ est un majotrant de A.

3. $\sup A = -\inf B$, en justifiant l'existence de la borne supérieure de A et de la borne inférieure de B.

   D'après les données, $A \neq \emptyset$, est un sous ensemble borné, en particulier majoré, de $\mathbb{R}$ donc il admet une borne supérieure qu'on note $\sup A$. $\sup A$ est par définition, le plus petit des majorant de A; or d'après la question (1.) $-\sup A$ est aussi un minorant de l'ensemble $B \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$. L'ensemble B admet donc une borne inférieure $\inf B$ qui par définition constitue le plus grand des minorants de celui-ci, on a alors $\inf B \geq -\sup A$ ou encore $\underline{-\inf B \leq \sup A}$.
   D'autre part d'après la question (2.) $\inf B$ est un minorant de B donc $-\inf B$ est un majorant de A et comme $\sup A$ est le plus petit des majorants alors $\underline{-\inf B \geq \sup A}$. Finalement $\sup A = -\inf B$.

4. $\inf A = -\sup B$, en justifiant l'existence de la borne supérieure de B et de la borne inférieure de A.

   D'après les données, $A \neq \emptyset$, est un sous ensemble borné, en particulier minoré, de $\mathbb{R}$ donc il admet une borne inférieure qu'on note $\inf A$. Elle est la plus grand des minorants de A. En permutant les rôles de A et B dans la question (2.), $-\inf A$ est majorant de B qui est non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble B admet à son tour une borne supérieure qui est la plus petite des majorants. Il en découle que $\underline{\sup B \leq -\inf A}$.
   D'autre part, en permutant les rôles de A et B dans la question (1.), $\sup B$ est un majorant de B donc $-\sup B$ est un minorant de A et comme $\inf A$ est le plus grand des minorants alors $-\sup B \leq \inf A$ ce qui donne que $\underline{\sup B \geq -\inf A}$. Finalement $\inf A = -\sup B$.

Exercice IV (6 points)—

Soient deux réels $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$. Pour U_0 et V_0 deux réels donnés on considère les suites (U_n) et (V_n) définies par les récurrences :

$$U_{n+1} = \frac{U_n + \lambda V_n}{1 + \lambda}, \qquad V_{n+1} = \frac{U_n + \mu V_n}{1 + \mu}.$$

1. Montrer que la suite (W_n) de terme général $W_n = V_n - U_n$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{\mu - \lambda}{(1+\mu)(1+\lambda)}$. En déduire l'expression générale pour tout n en fonction de q, U_0 et V_0.

   Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} &= \frac{U_n + \mu V_n}{1+\mu} - \frac{U_n + \lambda V_n}{1+\lambda} = \frac{(U_n + \mu V_n)(1+\lambda) - (U_n + \lambda V_n)(1+\mu)}{(1+\mu)(1+\lambda)} \\ &= \frac{\mu - \lambda}{(1+\mu)(1+\lambda)}(V_n - U_n) = qW_n. \end{aligned}$$

   La suite (W_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \dfrac{\mu - \lambda}{(1+\mu)(1+\lambda)}$. Il en découle l'expression générale de celle-ci

$$\forall n \in N,\ W_n = q^n W_0 = \frac{(\mu - \lambda)^n}{(1+\mu)^n(1+\lambda)^n}(V_0 - U_0)$$

2. Déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$.

   Il suffit de prouver que $|q| < 1$ pour montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$. En effet, pour tout $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$ on a

$$\left|\frac{\mu - \lambda}{(1+\mu)(1+\lambda)}\right| \leq \frac{\mu + \lambda}{(1+\mu)(1+\lambda)} = \frac{\mu + \lambda}{1 + (\mu + \lambda + \lambda\mu)} < 1.$$

3. On suppose que $U_0 \neq V_0$, montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes si et seulement si $\mu \geq \lambda$.

   Pour montrer que les deux suites sont adjacentes, sachant que $\lim\limits_{n \to +\infty}(V_n - U_n) = 0$, il suffit de montrer que l'une est croissante et l'autre est décroissante. On a d'une part:

$$\begin{aligned} \forall n \in N,\ U_{n+1} - U_n &= \frac{U_n + \lambda V_n}{1+\lambda} - U_n \\ &= \frac{\lambda}{1+\lambda}(V_n - U_n) = \frac{\lambda}{1+\lambda} q^n (V_0 - U_0). \end{aligned}$$

   D'autre part:

$$\begin{aligned} \forall n \in N,\ V_{n+1} - V_n &= \frac{U_n + \mu V_n}{1 + mu} - V_n \\ &= -\frac{1}{1+\mu}(V_n - U_n) = -\frac{1}{1+\mu} q^n (V_0 - U_0). \end{aligned}$$

   Il est clair que le signe de $U_{n+1} - U_n$ dépend du signe de q et de $(V_0 - U_0)$ Si on suppose que $V_0 - U_0 > 0$ alors (U_n) est croissante si et seulement si $q \geq 0$. La suite (V_n) est dans ce cas décroissante. Dans le cas où $V_0 - U_0 < 0$, (U_n) est décroissante si et seulement si $q \geq 0$, la suite (V_n) est alors croissante.
   En conclusion: (U_n) et (V_n) sont adjacentes si et seulement si ($q \geq 0 \Longleftrightarrow \mu \geq \lambda$).

4. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} V_n = \frac{(1+\lambda)U_0 + \lambda(1+\mu)V_0}{1 + 2\lambda + \lambda\mu}.$$

On peut calculer, par exemple, la limite de la suite (U_n) en explicitant son terme général comme suit:

$$\begin{aligned} U_n = U_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(U_{k+1} - U_k) &= U_0 + \frac{\lambda(V_0 - U_0)}{1+\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} q^k \\ &= U_0 + \frac{\lambda(V_0 - U_0)}{1+\lambda} \frac{1-q^n}{1-q}. \end{aligned}$$

En en déduit la limite suivante:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = U_0 + \frac{\lambda(V_0 - U_0)}{(1+\lambda)(1-q)} = \frac{(1+\lambda)U_0 + \lambda(1+\mu)V_0}{1+2\lambda+\lambda\mu},$$

et par conséquent on a

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} V_n = \frac{(1+\lambda)U_0 + \lambda(1+\mu)V_0}{1+2\lambda+\lambda\mu}.$$