Corrigé du
Final MT02 - P2022

Exercice 1 - (Barème approximatif : 7 points - Temps de composition : 35 min)

1. Soit $f_1(x) = 2\cos x + \sin(3x)$ et $f_2(x) = \dfrac{x - 2x^2}{1 + x + 3x^2}$.

   (a) Déterminer le développement limité de f_1 au voisinage de 0 à l'ordre 3.
   Correction :
   $$f_1(x) \underset{x\approx 0}{=} 2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \left(3x - \frac{(3x)^3}{6}\right) + o(x^3) = 2 + 3x - x^2 - \frac{9x^3}{2} + o(x^3).$$

   (b) A l'aide d'une division selon les puissances croissantes, montrer que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f_2 est
   $$f_2(x) = x - 3x^2 + o(x^3)$$
   Correction :
   $$\begin{array}{llllll|l} & x & - & 2x^2 & & & 1 + x + 3x^2 \\ \hline R_1 : & & & -3x^2 & - & 3x^3 & \underbrace{\underbrace{x}_{Q_1} - 3x^2}_{Q_2} \\ & & R_2 : & & & 9x^4 & \end{array}$$
   d'où $f_2(x) = x - 3x^2 + o(x^3)$

   (c) En déduire que le développement limité de $g = f_1 \circ f_2$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 est
   $$g(x) = 2 + 3x - 10x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3).$$
   Correction : On applique la règles de composition de DL. Comme $f_1(0) = 0$, on peut poser $y = x - 3x^2$ dans $f_2(y)$, soit
   $$\begin{aligned} g(x) = f_2 \circ f_1(x) &= 2 + 3(x - 3x^2) - (x - 3x^2)^2 - \frac{9}{2}(x - 3x^2)^3 + o(x^3) \\ &= 2 + 3x - 9x^2 - x^2 + 6x^3 - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) \\ &= 2 + 3x - 10x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

(d) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Sans calculs supplémentaires, indiquer pour quelle valeur de α la fonction définie par $h(x) = g(x) - \alpha x$ admet-elle un extremum local en $a = 0$? Préciser sa nature.

Correction : On a
$$h(x) = 2 + (3 - \alpha)x - 10x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3).$$
Une condition nécéssaire est que $h'(0) = 0$ donc on doit avoir $\boxed{\alpha = 3}$. Par conséquent $h(x) - h(0) = -10x^2 + o(x^2) \leq 0$, il s'agit alors d'un maximum local.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = (x-1)g(\frac{1}{x})$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

(a) Déterminer le développement limité de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ sous la forme
$$f(x) = 2x + a + \frac{b}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$
où les valeurs de $a \neq 0$ et $b \neq 0$ sont à préciser.

Correction : On a
$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\left(2 + \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{3}{2x^3} + o(\tfrac{1}{x^3})\right) \\ &= 2x - 2 + 3 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x + 1 - \frac{13}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

(b) i. Donner l'équation de la droite asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Correction : L'équation de la droite asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ est $\boxed{y = 2x + 1}$.

ii. Indiquer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.

Correction : • Au voisinage de $+\infty$, on a $x > 0$ donc $f(x) - (2x+1) = -\frac{13}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) < 0$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est située sous l'asymptote.

• Au voisinage de $-\infty$, on a $x < 0$ donc $f(x) - (2x+1) = -\frac{13}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) > 0$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de l'asymptote.

Exercice 2 - (Barème approximatif : $(5\,,10)$ points - Temps de composition : (25 min, 1h))

Partie I - Suite de fonctions et intégrales

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + (n-x)^2}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$. Montrer que $u_n = f_n(\frac{n}{2})$.

Correction : On a $|f_n(x)| = f_n(x)$. On calcule la dérivée 1ère :
$$f_n'(x) = \frac{-(2x - 2(n-x))}{(x^2 + (n-x)^2)^2} = \frac{2n - 4x}{(x^2 + (n-x)^2)^2}$$

$$f_n'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 2n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{n}{2}.$$

x	$-\infty$		$\frac{n}{2}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$u_n = \frac{2}{n^2}$	$\searrow$	0

On a bien $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = u_n = f_n(\frac{n}{2}) = \frac{2}{n^2}$.

2. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $D = \mathbb{R}$ vers la fonction identiquement nulle.

   Correction : Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on en déduit la convergence uniforme de (f_n) vers la fonction identiquement nulle.

3. À l'aide d'un changement de variable, montrer que la forme générale des primitives de f_n est

$$\tfrac{1}{n}\text{Arctan}(\tfrac{2x}{n} - 1) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(Mettre sous forme canonique la forme développée de $x^2 + (n-x)^2 = 2x^2 - 2nx + n^2$.)

   Correction : • On commence par déterminer la forme canonique du dénominateur :

$$2x^2 - 2nx + n^2 = 2(x^2 - nx + \frac{n^2}{2}) = 2\big((x - \frac{n}{2})^2 - \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{2}\big) = 2\big((x - \frac{n}{2})^2 + \frac{n^2}{4}\big).$$

   • On cherche le changement de variable à effectuer pour utiliser la primitive de $\frac{1}{1+t^2}$:

$$f_n(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{(x-\frac{n}{2})^2 + \frac{n^2}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{n^2}{4}} \times \frac{1}{1 + \frac{4}{n^2}(x - \frac{n}{2})^2} = \frac{2}{n^2} \times \frac{1}{1 + (\frac{2x}{n} - 1)^2}.$$

   On pose alors le changement de variable $\boxed{t = \frac{2x}{n} - 1}$.

   • Calcul de dx and fonction de dt : $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d[\frac{n(t+1)}{2}]}{dt} = \dfrac{n}{2}$.

   La primitive de la variable t est :

$$\int f_n(x)\, dx = \int \frac{2}{n^2} \times \frac{1}{1+t^2} \times \frac{n}{2} dt = \frac{1}{n}\text{Arctan} t + C$$

   La forme générale des primitives de f_n est donc $\frac{1}{n}\text{Arctan}(\frac{2x}{n} - 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

4. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

   Correction : On calcule I_n :

$$I_n = \frac{1}{n}\Big[\text{Arctan}(\tfrac{2x}{n} - 1)\Big]_0^n = \frac{1}{n}\left(\text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(-1)\right) = \frac{\pi}{2n} \underset{n\to 0}{\to} 0.$$

AUtre démonstration : on encadre I_n :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \quad 0 \leq I_n = \int_0^n f_n(x)dx \leq \int_0^n \frac{1}{n^2}dx = \frac{1}{n^2} \times (n-0) = \frac{1}{n}.$$

Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to 0}{\to} 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

Vous pouvez admettre les résultats de la partie I pour répondre à certaines questions de la partie II.

Partie II - Équation différentielle linéaire du 1er ordre

1. À l'aide d'une intégration par partie, calculer

$$G_1(x) = \int_2^x t\, e^{\frac{t}{2}}\, dt.$$

Correction : on pose $u'(t) = e^{\frac{t}{2}}$ et $v(t) = t$.
Donc $u(t) = 2e^{\frac{t}{2}}$ et $v'(t) = 1$. Ainsi

$$G_1(x) = \left[2te^{\frac{t}{2}}\right]_2^x - \int_2^x 2e^{\frac{t}{2}}\, dt = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e - \left[4e^{\frac{t}{2}}\right]_2^x = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e - (4e^{\frac{x}{2}} - 4e) = (2x-4)e^{\frac{x}{2}}.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{t-1}{t^2-4t+8}$

(a) Déterminer deux nombres réels α et β tels que

$$g(t) = \alpha\frac{u'(t)}{u(t)} + \beta f_4(t)$$

où $u(t) = t^2 - 4t + 8$ et f_4 est la fonction définie au **I.** pour $n = 4$.

Correction : On a $f_4(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2-4x+8}$. Ainsi,

$$\frac{t-1}{t^2-4t+8} = \frac{\alpha(2t-4)}{t^2-4t+8} + \frac{\beta}{2x^2-8x+16} \Leftrightarrow t-1 = \alpha(2t-4) + \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\alpha \\ -1 = -4\alpha + \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

D'où $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 2(-1+4\alpha) = 2$.

(b) En déduire $G_2(x) = \displaystyle\int_2^x g(t)\, dt$.

Correction : En utilisant partie **I-3)**, obtient

$$\begin{aligned} G_2(x) &= \left[\frac{1}{2}\ln(t^2-4t+8) + \frac{1}{2}\text{Arctan}(\frac{t}{2}-1)\right]_2^x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{1}{2}\text{Arctan}(\frac{x}{2}-1) - \ln(2) \end{aligned}$$

(c) Effectuer la division selon les puissances croissantes de $A(x) = x^4 - 2x^2 + 16$ par $B(x) = x^2 - 4x + 8$ avec un reste de valuation 3.

Correction :

$$
\begin{array}{lccccc|c}
16 & & - & 2x^2 & + & x^4 & 8-4x+x^2 \\
\hline
R_1 : & 8x & - & 4x^2 & + & x^4 & \underbrace{\underbrace{2}_{Q_1} + x}_{Q_2} \\
 & & & R_2 : & & -x^3+x^4 &
\end{array}
$$

D'où $A(x) = B(x) \times (2+x) + (-x^3 + x^4)$.

(d) En déduire que

$$\frac{A(x)}{x^3 B(x)} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + g(x).$$

Correction : On obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{A(x)}{x^3 B(x)} = \frac{B(x) \times (2+x) + (-x^3 + x^4)}{x^3 B(x)} &= \frac{2+x}{x^3} + \frac{-1+x}{B(x)} \\
&= \frac{2}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{x-1}{x^2-4x+8} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + g(x).
\end{aligned}
$$

3. Soit I un intervalle. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad xy' - 2y = \frac{x^4 - 2x^2 + 16}{x^2 - 4x + 8} + x^4 e^{\frac{x}{2}}, \quad \text{avec } x \in I.$$

(a) Dans cette question, on suppose que $I =]0, +\infty[$.

i. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E).

Correction : On isole y' : $\boxed{y' = \frac{2}{x} y + \frac{A(x)}{xB(x)} + x^3 e^{\frac{x}{2}}}$.

On trouve

$$y_h(x) = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

ii. À l'aide de la variation de la constante, déterminer une solution particulère de (E). *(Indication : utiliser les questions* **1.** *et* **2.***)*

Correction : On pose $y_p(x) = \varphi(x) \times x^2$. On obtient

$$\varphi'(x) = \frac{A(x)}{x^3 B(x)} + x e^{\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + G_1(x) + G_2(x).$$

D'où $\boxed{y_p(x) = -x - 1 + x^2 \big(G_1(x) + G_2(x)\big)}$.

iii. En déduire que l'unique solution de (E) satisfaisant $y(2) = 1$ est

$$y_*(x) = x^2 - x - 1 + x^2(G_1(x) + G_2(x)).$$

Correction : La forme générale des solutions est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Cx^2 - x - 1 + x^2\big(G_1(x) + G_2(x)\big).$$

$$y(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 4C - 3 + 4(0+0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 4C = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 1}.$$

iv. Justifier que y_* est prolongeable par continuité en 0.

Correction : On a $\lim\limits_{x \to 0+} y_*(x) = -1$. La limite existe donc la fonction y_* est prolongeable par continuité en 0.

(b) Le système

$$\begin{cases} xy' - 2y = \frac{x^4 - 2x^2 + 16}{x^2 - 4x + 8} + x^4 e^{\frac{x}{2}}, \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

admet-il une et une seule solution définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$?

Correction : Non, il y a une infinité de solutions. Les fonctions définies par

$$\begin{cases} y(x) = x^2 - x - 1 + x^2(G_1(x) + G_2(x)) & \text{si } x \geq 0 \\ y(x) = C_2 x^2 - x - 1 + x^2(G_1(x) + G_2(x)) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

sont des solutions de classe $\mathscr{C}^1$ de (E) quel que soit le choix de $C_2 \in \mathbb{R}$.