Final MT02 - P2023
Durée : 2h

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 - (Barème approximatif : 8 points - Temps de composition : 50 min)

1. Soit G la fonction définie sur $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\tan t}{2+\cos^2 t}\, dt$.
   (a) Déterminer deux nombres réels α et β tels que
   $$\frac{1}{u(2+u^2)} = \alpha \times \frac{1}{u} + \beta \times \frac{u}{2+u^2}.$$
   (b) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{u(2+u^2)} du = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{3x^2}{2+x^2}\right)$.
   (c) À l'aide du changement de variable $u = \cos t$, montrer que $G(x) = -\displaystyle\int_1^{\cos x} \frac{1}{u(2+u^2)}\, du$.
   Puis, donner l'expression algébrique de $G(x)$.
2. On se propose de déterminer une primitive F de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{(1-x)^2}{x^3(1+x^2)}$.
   (a) Effectuer la division selon les puissances croissantes de $A(x) = (1-x)^2$
   par $B(x) = 1 + x^2$ avec un reste de valuation 3.
   (b) En déduire qu'une expression algébrique de F est
   $$F(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x} + 2\text{Arctan}\, x.$$
3. On considère l'équation différentielle suivante
   $$(E) \qquad (2+\cos^2 x)y' + 4\tan(x)y = f(x+1)\cos^2 x, \quad \text{avec } x \in I.$$
   (a) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E).
   (b) À l'aide de la variation de la constante, montrer qu'une solution particulière de (E) est
   (Indication : utiliser les questions **1.** *et* **2.***)*
   $$\frac{\cos^2 x}{2+\cos^2 x} \times F(x+1).$$
   (c) En déduire l'unique solution de (E) satisfaisant $y(0) = 0$.

Exercice 2 - (Barème approximatif : 7 points - Temps de composition : 35 min)

On définit deux applications par $\forall\, x \geq -1,\ f_1(x) = 4\sqrt{1+x} - 3e^x$ et $\forall\, y < 2,\ f_2(y) = \dfrac{2+y}{2-y}$.

1. Déterminer le développement limité de f_1 au voisinage de 0 à l'ordre 3.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x) - 1 + x + 2x^2}{x - \sin x} = -\frac{3}{2}$.
3. Déterminer le développement limité de f_2 au voisinage de 1 à l'ordre 3. (*Indication : effectuer le changement de variable $y = 1 + h$.)*
4. En déduire que le développement limité de $g = f_2 \circ f_1$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 est

$$g(x) = 3 - 4x - 4x^2 + 11x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\,]-\frac{1}{2}, 0]$ par $f(x) = (2x-1)g(\frac{1}{2x})$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
   (a) Déterminer le développement limité de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ sous la forme

$$f(x) = 6x + a + \frac{b}{x^2} + \frac{1}{x^2}\widetilde{\varepsilon}\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{avec } \widetilde{\varepsilon}(t) \underset{t\to 0}{\to} 0,$$

   où les valeurs de $a \neq 0$ et $b \neq 0$ sont à préciser.
   (b) i. Donner l'équation de la droite asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
   ii. Indiquer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 3 - (Barème approximatif : 6 points - Temps de composition : 35 min)

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $D = [0, +\infty[$ par $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$.

1. Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\max_{x\in D} |f_n(x)|$. Montrer que $u_n = f_n(\frac{2}{n})$.
3. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle uniformément sur D vers la fonction identiquement nulle ?
4. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$. Sans calculer I_n, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
5. À l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties, montrer que

$$n^2 I_n = 2 - (n^2 + 2n + 2)e^{-n}.$$

6. A l'aide des règles de Riemann, en déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} I_n$ est une série convergente *(Indication : proposer une suite équivalente à $(I_n)_{n\geq 0}$.)*