

Aucun document ni calculatrice.

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Rappel : pour un total de 20 points, choisir de traiter

- soit l'exercice 1 - parties I, II et III ;
- soit l'exercice 1 - parties I et II - et l'exercice 2.

Exercice 1 (Barème approximatif : (7,6,7) points)

On considère la fonction définie et continue sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2 - 3x + 2x^2}$.

Dans tout l'exercice (u_n) est la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Partie I - Etude d'une suite récurrente

1. (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = x$.

Correction :

$$\sqrt{2 - 3x + 2x^2} = x \Leftrightarrow 2 - 3x + 2x^2 = x^2 \text{ et } x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ et } x \geq 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2.$$

La fonction f admet donc deux points fixes : $\{1, 2\}$.

- (b) Justifier que $f(x) - x$ est du même signe que $x^2 - 3x + 2$.

Dresser le tableau de signe de $f(x) - x$ sur $[0, +\infty[$.

Correction : On utilise la méthode du conjugué

$$\sqrt{2 - 3x + 2x^2} - x = (\sqrt{2 - 3x + 2x^2} - x) \times \frac{(\sqrt{2 - 3x + 2x^2} + x)}{\sqrt{2 - 3x + 2x^2} + x} = \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{2 - 3x + 2x^2} + x}$$

Le dénominateur étant positif sur $[0, +\infty[$, la quantité $f(x) - x$ est bien du même signe que $x^2 - 3x + 2$.

x	0	1	2	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	0	+

2. Que peut-on dire de (u_n) si u_0 est un point fixe de f ?

Correction : Les suites sont constantes (donc convergentes) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$.

Cela se justifie par récurrence. L'initialisation est évidemment vraie.

$$\textbf{Hérédité : } u_n = u_0 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) = f(u_0) = u_0.$$

3. On suppose dans cette question que $u_0 \in]1, 2[$.

- (a) Montrer par récurrence sur n que $\forall n \geq 0, u_n \in]1, 2[$.

(Indication : observer que $2x^2 - 3x + 2 = 2(x - 1)^2 + x$.)

Correction : L'initialisation à $n = 0$ est donnée par l'énoncé.

Hérédité : $u_n \in]1, 2[\Rightarrow 0 < 2(u_n - 1)^2 < 2 \Rightarrow 1 < 2(u_n - 1)^2 + u_n < 4 \Rightarrow \sqrt{1} < \underbrace{\sqrt{2(u_n - 1)^2 + u_n}}_{=f(u_n)} < \sqrt{4}$

$$\Rightarrow 1 < u_{n+1} < 2$$

- (b) Préciser la monotonie de (u_n) .

Correction : Il s'agit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$: d'après le tableau de signe de $f(x) - x$ on en déduit que

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$$

donc (u_n) est strictement décroissante.

- (c) Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ à préciser.

Correction : La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers l'un des points fixes de f . Comme on doit avoir $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \ell$, la limite est $\ell = 1$.

4. On suppose dans cette question que $u_0 > 2$.

- (a) Préciser la monotonie de (u_n) .

Correction : Tout d'abord, le raisonnement effectué à la question **I-3a)** permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$. Ensuite, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$: d'après le tableau de signe de $f(x) - x$ on en déduit que

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$$

donc (u_n) est strictement croissante.

- (b) Montrer par l'absurde que (u_n) diverge.

Correction : On suppose que (u_n) converge vers une limite ℓ qui est nécessairement un point fixe de f . Comme la suite (u_n) est croissante, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$ et en particulier $u_0 \leq \ell$. D'après la question **I-1a)** on sait que $\ell \leq 2$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse sur $u_0 > 2$.

Conclusion : (u_n) diverge.

- (c) Montrer par l'absurde que (u_n) tend vers $+\infty$.

Correction : Supposons que (u_n) ne tend pas vers $+\infty$. Cela signifie que (u_n) est majorée. Comme (u_n) est croissante, cela implique que (u_n) converge. Ceci est impossible car (u_n) diverge.

Conclusion : (u_n) tend vers $+\infty$.

Partie II - Étude d'un ensemble

On admet que la fonction g définie sur $]2, +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est strictement croissante.

Pour $u_0 > 2$ fixé, on pose $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on définit l'ensemble $A := \{w_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

- Calculer $\ell' = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Correction : Pour $x \geq 0$,

$$\frac{\sqrt{2-3x+2x^2}}{x} = \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} + 2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2}.$$

2. Justifier que $\text{Im } g$ est un intervalle ouvert, puis déterminer $\text{Im } g$.

Correction : La fonction g étant continue et strictement croissante, $\text{Im } g$ est un intervalle.

Puisque $g(2) = 1$, on a $\text{Im } g =]1, \sqrt{2}[$.

3. Dédire de **I-4**) que (w_n) converge vers ℓ' .

Correction : Il faut remarquer que $w_n = g(u_n)$. Par composition de limites, on a

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \Rightarrow w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}.$$

4. Justifier que (w_n) est strictement croissante.

Correction : D'après **I-4**), on sait que (u_n) est strictement croissante. Comme g est strictement croissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, g(u_n) < g(u_{n+1})$$

Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}, w_n < w_{n+1}$.

5. En déduire que A admet-il un plus petit élément $q = \min A$ à préciser et que $q > 1$.

Correction : On peut alors ordonner les termes de la suite (w_n) ainsi

$$w_0 < w_1 < \dots < w_n < \dots \leq \ell'.$$

L'ensemble A admet un plus petit élément $q = w_0 = g(u_0)$. Comme $\text{Im } g =]1, \sqrt{2}[$, on en déduit que $q > 1$.

6. Démontrer que $\sup A = \ell'$.

Correction : La limite ℓ' satisfait la caractérisation de la borne supérieure : on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow \ell' - \varepsilon < w_n < \ell' + \varepsilon)$$

On applique la définition de la limite à $\varepsilon = \ell' - t > 0$ et on prend $n = N + 1$

$$\forall t < \ell', \exists n = N + 1 \in \mathbb{N}, u_n > t.$$

7. L'ensemble A admet-il un plus grand élément ?

Correction : Par contre ℓ' n'est pas le plus grand élément de A car $\ell' \notin A$. Pour le justifier, on peut

- soit résoudre l'équation $w_n = \ell'$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell' \Leftrightarrow f(u_n) = \sqrt{2}u_n \Leftrightarrow 2 - 3u_n = 0 \Leftrightarrow u_n = \frac{2}{3}.$$

Impossible car le plus petit élément est $u_0 > 2$;

- soit utiliser la stricte monotonie :

$$\forall M = w_n \in A, \exists x = w_{n+1} \in A, M < x.$$

La négation de « A admet un plus grand élément » est vraie.

Partie III - Etude de séries numériques

1. Compléter la proposition suivante par l'un des symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

$$\forall (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \left(\sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \quad \dots \quad \sum_{n \geq 0} |v_n| \text{ converge} \right).$$

Correction :

$$\forall (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \left(\sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \quad \Leftarrow \quad \sum_{n \geq 0} |v_n| \text{ converge} \right).$$

2. (a) A l'aide des règles de Riemann, justifier que la série définie par $\sum_{k=0}^n \frac{1}{f(k)}$ diverge.

Correction : D'après **II-1**), on sait que $\frac{n}{f(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$. Cela signifie que $\frac{1}{f(n)} \approx_{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{2}}$ donc la série diverge.

- (b) Montrer que la série définie par $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{f(k)}$ converge.

(Indication : montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et utiliser la monotonie de f .)

Correction : De l'écriture $f(x) = \sqrt{2(x-1)^2 + x}$, on en déduit que f est croissante sur $[1, +\infty[$.

- (S_{2n}) est décroissante :

$$f(2n+1) \leq f(2n+2) \Rightarrow S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{f(2n+2)} - \frac{1}{f(2n+1)} \leq 0$$

- (S_{2n+1}) est croissante :

$$f(2n+2) \leq f(2n+3) \Rightarrow S_{2n+3} - S_{2n+2} = -\frac{1}{f(2n+3)} + \frac{1}{f(2n+2)} \geq 0$$

- Enfin,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{f(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite $S \in \mathbb{R}$. La suite (S_n) converge donc vers S également.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$ où (u_n) est la suite récurrente de premier terme $u_0 > 2$.

- (a) Montrer par récurrence sur n que $\forall n \geq 0, u_n \geq q^n u_0$, où q est défini à la question **II-5**).

Correction : On définit $P(n) := \ll u_n \geq q^n u_0 \gg$.

Initialisation à $n=0$. $u_0 = q^0 u_0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. On suppose $P(n)$ vraie.

$$u_n \geq q \Rightarrow u_{n+1} \geq q u_n \geq q \times q^n u_0 = q^{n+1} u_0.$$

Alors $P(n+1)$ vraie. L'hérédité est vérifiée.

- (b) En déduire que $\forall n \geq 0, T_n \leq \frac{q}{(q-1)u_0}$. (Indication : étudier la série géométrique de terme général $\frac{1}{u_0}(\frac{1}{q})^n$.)

Correction : On en déduit que

$$T_n \leq \frac{1}{u_0} + \frac{1}{qu_0} + \dots + \frac{1}{q^n u_0} = \frac{1}{u_0} \times \frac{1 - q^{-n-1}}{1 - q^{-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_0} \times \frac{1}{1 - q^{-1}} = \frac{1}{u_0} \times \frac{q}{q-1}.$$

La série de terme général $\frac{1}{u_0} \frac{1}{q^n}$ étant croissante, elle est majorée par sa limite. Ainsi, $\forall n \geq 0, T_n \leq \frac{q}{(q-1)u_0}$.

- (c) Justifier que (T_n) converge.

Correction : (T_n) est une suite de terme positif donc elle est croissante. Comme elle est majorée, elle converge.

Exercice 2 (Barème approximatif : 7 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit f l'application définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{1 - |x|}$.

- (a) Rappeler la définition avec quantificateurs de « f est continue en $a \in \mathbb{R}$ ».

Correction :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in] -1, 1[, \left(|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \right).$$

- (b) Utiliser cette définition pour montrer que f est continue en $a = 0$.

Correction : Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on résout $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

$$\left| \frac{1}{1 - |x|} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < \frac{1}{1 - |x|} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1 - \varepsilon} < |x| < 1 + \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

On choisit alors $\eta = 1 + \frac{1}{1 + \varepsilon}$ et on a bien

$$|x| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

2. Soit $\Omega =] -1, 1[$ et f l'application définie sur $\Omega \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{\ln(1 - x^2)}{\sin 2x}$.

- (a) Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - t)}{t} = -1$.

Correction : On pose $g(t) = \ln(1 - t)$. La fonction g est définie et dérivable sur Ω avec $g'(t) = -\frac{1}{1-t}$ donc

$$\frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \frac{\ln(1 - t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} g'(0) = -1.$$

- (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en $a = 0$ en une fonction $\tilde{f}$ à préciser.

Correction : En tant que quotient et composition de fonctions usuelles (polynôme, ln, sinus), la fonction f est continue sur son domaine de définition $\Omega \setminus \{0\}$. De plus,

$$f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 \times 1 \times 0 = 0.$$

Par conséquent la fonction f est prolongeable en une fonction continue sur Ω définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x^2)}{\sin 2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(c) Montrer que $\tilde{f}'(0) = -\frac{1}{2}$.

Correction :

$$\tilde{f}'(0) = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1-x^2)}{x \sin 2x} = \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 \times 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

(d) Justifier que $\tilde{f}$ est dérivable sur Ω et montrer que, pour $x \neq 0$, on a

$$\tilde{f}'(x) = -\frac{2x}{(1-x^2)\sin(2x)} - \frac{2f(x)}{\tan(2x)}.$$

Correction : On vient de justifier que $\tilde{f}$ est dérivable en 0. De plus, f est composée de fonctions usuelles donc elle est dérivable sur son domaine de définition $\Omega \setminus \{0\}$. Finalement, $\tilde{f}$ est dérivable sur Ω et pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(x) &= \frac{\frac{-2x \sin(2x)}{(1-x^2)} - 2 \cos(2x) \ln(1-x^2)}{(\sin(2x))^2} = -\frac{2x}{\sin(2x)} \times \frac{1}{1-x^2} - \frac{2 \cos(2x) \ln(1-x^2)}{(\sin(2x))^2} \\ &= -\frac{2x}{\sin(2x)} \times \frac{1}{1-x^2} - 2 \times \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} \times \frac{\ln(1-x^2)}{\sin(2x)} \\ &= -\frac{2x}{\sin(2x)} \times \frac{1}{1-x^2} - 2 \times \frac{1}{\tan(2x)} \times f(x) \end{aligned}$$

(e) La fonction dérivée $\tilde{f}'$ est-elle continue en $a = 0$?

Correction : On doit montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}'(x) = \tilde{f}'(0)$.

$$-\frac{2x}{\sin(2x)} \times \frac{1}{1-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 \times 1 = -1$$

$$\frac{2f(x)}{\tan(2x)} = \frac{2x}{\tan(2x)} \times \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = -\frac{1}{2}$$

Par conséquent $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}'(x) = -1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} = \tilde{f}'(0)$.