MT02 - Test 1 (45 min) - P2022

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : (6 points)
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soient P et Q deux propositions. On définit le connecteur logique $\otimes$, appelé *"ou exclusif"*, par :
$$P \otimes Q := \text{« } (P \text{ et non } Q) \text{ ou } (\text{non } P \text{ et } Q) \text{ ».}$$
Les équivalences suivantes sont-elles toujours vraies ? Justifier !
   (a) $((P \text{ ou } Q) \text{ et } (\text{non } P \text{ ou non } Q)) \quad \Leftrightarrow \quad (P \otimes Q)$.
   (b) $((P \text{ et } Q) \text{ ou } (\text{non } P \text{ et non } Q)) \quad \Leftrightarrow \quad (P \otimes Q)$.
2. Préciser si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier !
   (a) $\exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(x+y) = \sin(x+y)$.
   (b) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ \cos(x+y) = \sin(x+y)$.

Exercice 2 (Barème approximatif : (9 points)
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On note $\vec{x} = (x_1, x_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Soit h l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par
$$h(\vec{x}) = \big(x_1 x_2\ ,\ x_2 + 1\big)$$
   (a) Écrire, à l'aide des quantificateurs, la définition de « h est injective sur $\mathbb{R}^2$ ».
   (b) Montrer que h n'est pas injective. *(Indication : étudier l'équation $h(\vec{x}) = (0,1)$)*
   (c) L'application h est-elle surjective ?
2. Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante.
   (a) Rappeler la définition de la borne supérieure de A, notée $\sup A$.
   (b) Justifier que l'ensemble $f(A) := \{y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in A,\ y = f(x)\}$ admet une borne supérieure.
   (c) Montrer que $\quad \sup f(A) \leq f(\sup A)$.
   (d) Peut-on affirmer que pour toute fonction croissante f, on a $\quad \sup f(A) = f(\sup A)$?
   (Indication : étudier le cas $f(x) = E(x)$, avec un ensemble A de votre choix.)

Exercice 3 (Barème approximatif : (5 points)
On considère les suites (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = \frac{3n+4}{n+1}$.

1. Rappeler la définition avec quantificateurs de « la suite (u_n) converge ».
2. À l'aide de cette définition, montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ à préciser.
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n) et compléter les pointillés (par $\leq$ ou $\geq$) :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \quad \ldots \quad \ell.$$
4. En déduire que (v_n) définie pour $n \geq 0$ par $v_n = u_0 + u_1 \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ tend vers $+\infty$.