

Aucun document ni calculatrice.

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

**Exercice 1** (Barème approximatif : (5 points))

Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ .

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

Correction :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

2. Montrer que  $f'(x) = -(x^2 + 1)e^{-x}$ .

Correction :

$$f'(x) = (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 3)e^{-x} = e^{-x}(-x^2 - 1).$$

3. En déduire que  $f$  admet une application réciproque  $f^{-1}$  dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

Correction : La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$ . Par conséquent  $f$  admet une application réciproque  $f^{-1}$  définie et dérivable sur  $\text{Im } f$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la continuité de  $f$  et le tableau de variation ci-dessous

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -         |           |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $0$       |

on en déduit que  $\text{Im } f = ]0, +\infty[$ .

4. Sachant que  $f(0) = 3$ , calculer  $(f^{-1})'(3)$ .

Correction :  $f(3) = 0 \Leftrightarrow 0 = f^{-1}(3)$ . Ainsi

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(0)} = -1$$

**Exercice 2** (Barème approximatif : (7 points))

1. On pose  $f(x) = \text{Arcsin}(\frac{x}{2})$ . On admet que  $f$  est bien définie de  $I = [-1, 1]$  dans lui même.

- (a) Montrer que  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ .

Correction : On rappelle que  $\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . La fonction dérivée de  $f$  est donc

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

(b) En déduire que  $\forall x \in ]-1, 1[, \frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Correction : On effectue successivement les calculs suivants

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 3 \leq 4 - x^2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{3} \leq 4 - x^2 \leq \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. (a) Soient  $(a, b) \in I^2$ , avec  $a < b$ . Énoncer le théorème des accroissements finis pour la fonction  $f$  sur  $[a, b]$ .

Correction : Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  alors

$\exists c \in ]a, b[, f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

(b) En déduire que  $\forall (x, x') \in I^2, |f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}|x - x'|$ .

Correction : Soient  $(x, x') \in I^2$ . Soit  $x = x'$  et l'inégalité est satisfaite :  $|f(x) - f(x')| = 0$  et  $\frac{1}{\sqrt{3}}|x - x'| = 0$ .

Soit  $x \neq x'$  et on applique l'inégalité des accroissements finis :

$$\exists c \in ]x, x'[ \text{ (ou } c \in ]x', x]) , f(x) - f(x') = f'(c)(x - x').$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x')| = |f'(c)||x - x'| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}|x - x'|.$$

(c) Montrer que  $\ell = 0$  est l'unique point fixe de  $f$ .

Correction : Comme  $\sin(0) = 0$ , on a bien  $0 = \text{Arcsin}(0)$ . Par conséquent  $f(0) = 0$  et 0 est bien un point fixe de  $f$ .

On montre l'unicité par l'absurde : Soit  $\ell'$  un autre point fixe, c-à-d  $\ell' \neq 0$  et  $\ell' = f(\ell')$ . Alors

$$|f(\ell') - f(0)| = |\ell'| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}|\ell'| \underset{\text{car } \ell' \neq 0}{\Rightarrow} 1 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ce qui est absurde.

(d) Démontrer que la suite récurrente  $(u_n)$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $u_0 \in I$  converge vers 0.

Correction : On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |u_0|.$$

Comme  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |u_0| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , la suite  $(u_n)$  aussi.

### Exercice 3 (Barème approximatif : (8 points))

1. Soit  $f$  une application définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

Préciser sous quelle condition la fonction  $f$  admet un développement de Taylor-Young à l'ordre  $n \in \mathbb{N}$  en  $a \in I$ . Puis donner cette formule.

Correction : La fonction  $f$  admet un développement de Taylor-Young en  $a \in I$  si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ . De plus, il existe une fonction  $\varepsilon$  définie en tout point  $h$  tel que  $a + h \in I$  et

$$\forall a + h \in I, f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n \varepsilon(h),$$

avec  $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

2. Soit  $p$  un polynôme de degré 3 tel que pour  $k = 0, 1, 2, 3$  on a  $p^{(k)}(0) = 2$ .  
 Sans calculs, donner l'expression algébrique de  $p(x)$ .

Correction :  $p(x) = 2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3}$ .

3. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  en  $a = 0$  à l'ordre 3.

Correction : Il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $I = ]-\infty, 1[$  telle que

$$\forall x \in I, \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

4. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction  $x \mapsto e^x$  en  $a = 0$  à l'ordre 3.

Correction : Il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $I = \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in I, e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

5. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  un paramètre. Pour  $x \in I = ]-\infty, 1[$ , on pose  $f(x) = \frac{1}{1-x} - \alpha e^x + p(x)$ .

- (a) Déterminer (en fonction de  $\alpha$ ) les constantes  $c_2$  et  $c_3$  de sorte

$$\forall x \in I, f(x) = (3 - \alpha) + (3 - \alpha)x + c_2x^2 + c_3x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Correction : Par linéarité de la dérivation, le développement de Taylor-Young à l'ordre 3 de  $f$  s'obtient par sommation des développements précédents : il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $I = ]-\infty, 1[$  telle que

$$\begin{aligned} \forall x \in I, f(x) &= [1 + x + x^2 + x^3] - \alpha[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}] + [2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3}] + x^3\varepsilon(x) \\ &= (3 - \alpha) + (3 - \alpha)x + (2 - \frac{\alpha}{2})x^2 + (\frac{4}{3} - \frac{\alpha}{6})x^3 + x^3\varepsilon(x). \end{aligned}$$

- (b) Pour quelle valeur de  $\alpha$ , la fonction  $f$  est-elle un infiniment petit au voisinage de  $a = 0$ .  
 Préciser sa partie principale.

Correction : La fonction  $f$  est un infiniment petit au voisinage de  $a = 0$  ssi  $f(0) = 3 - \alpha = 0$ , soit  $\boxed{\alpha = 3}$ .

Dans ce cas la partie principale est  $c_2x^2 = \frac{x^2}{2}$ .