

Aucun document ni calculatrice.

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : (9 points))

1. Soit P un polynôme de degré 3.

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Écrire la formule de Taylor pour P à l'aide des dérivées successives $P^{(k)}(a)$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Correction :

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x - a) + \frac{P''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{P^{(3)}(a)}{6}(x - a)^3$$

(b) On suppose que pour $k = 0, 1, 2, 3$ on a $P^{(k)}(1) = 6$. Montrer que l'expression $P(x)$ est de la forme

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_3x^3,$$

où c_0, c_1 et c_3 sont des entiers naturels à préciser.

Correction : Il suffit de développer la formule de Taylor précédente avec $a = 1$

$$\begin{aligned} P(x) &= 6 + 6(x - 1) + \frac{6}{2}(x - 1)^2 + \frac{6}{6}(x - 1)^3 \\ &= 6 + 6x - 6 + 3x^2 - 6x + 3 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ &= 2 + 3x + x^3. \end{aligned}$$

2. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ en $a = 0$ à l'ordre 3.

Correction : Il existe une fonction ε telle que

$$\forall x > -1, \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{et } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

3. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ en $a = 0$ à l'ordre 3.

Correction : Il existe une fonction ε telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{et } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Pour $x \in I =]-1, +\infty[$, on pose $f(x) = P(x) - 2 \cos(x) + \alpha \ln(1+x)$.

(a) Déterminer (en fonction de α) les constantes réelles β_2 et β_3 de sorte que

$$\forall x \in I, f(x) = (\alpha + 3)x + \beta_2x^2 + \beta_3x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Correction :

$$\begin{aligned} f(x) &= [2 + 3x + x^3] - 2[1 - \frac{x^2}{2}] + \alpha[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}] + x^3\varepsilon(x) \\ &= (3 + \alpha)x + (1 - \frac{\alpha}{2})x^2 + (1 + \frac{\alpha}{3})x^3 + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

- (b) Justifier que la fonction f est un infiniment petit au voisinage de $a = 0$.
En fonction des valeurs de α , préciser sa partie principale.

Correction : • La fonction f est continue donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = P(0) - 2 \cos(0) + \alpha \ln 1 = 2 - 2 = 0.$$

Quelque soit la valeur de α , $f(x)$ est un infiniment petit au voisinage de 0.

- Si $\alpha \neq -3$, alors la partie principale est $(3 + \alpha)x$;
- Si $\alpha = -3$ alors la partie principale est $\frac{5}{2}x^2$.

Exercice 2 (Barème approximatif : (4 points))

Soit f la fonction définie sur $I = [-1, 1]$ par $f(x) = (x - 1)\text{Arcsin}(x)$.

1. À l'aide du théorème de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Correction : • L'application f est le produit d'un polynôme avec Arcsin. Celle-ci est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] - 1, 1[$, donc f l'est aussi.

• On a $f(0) = -\text{Arcsin}(0) = 0$ et $f(1) = 0 = f(0)$.

• D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$. (On ne cherche pas à déterminer la valeur de c).

2. Montrer que $\forall x \in] - 1, 1[$, $f''(x) = \frac{2 - x - x^2}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Correction : La dérivée première est

$$f'(x) = \text{Arcsin}(x) + \frac{x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

La dérivée seconde est

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\sqrt{1 - x^2} - (x - 1) \times \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}}{(1 - x^2)} = \frac{1 - x^2}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(1 - x^2) + x(x - 1)}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2 - x - x^2}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

3. En déduire que f admet un extremum global sur I et préciser sa nature : minimum ou maximum. (Indication : étudier le signe de f'' sur $] - 1, 1[$.)

Correction : On détermine le signe de f'' sur $] - 1, 1[$: le signe de f'' est donnée par le signe de $2 - x - x^2$. On a $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 > 0$. On cherche les deux racines

$$x_1 = \frac{1 - 3}{-2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + 3}{-2} = -2.$$

Le polynôme est négatif à l'extérieur des racines et positif sur $[-2, 1]$. On en déduit que la dérivée seconde est positive et que la fonction est convexe. Toute fonction convexe sur un intervalle I dont la dérivée première s'annule au moins une fois sur I admet un minimum global : $\forall x \in [-1, 1], f(x) \geq f(c)$.

Exercice 3 (Barème approximatif : (7 points))

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{x^3 + 4x - 3}{2}$. On admet que f est bijective de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et on note g son application réciproque.

(a) Justifier que g est dérivable sur \mathbb{R} et rappeler l'expression de g' en fonction de f' et g .

Correction : L'application f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3x^2 + 4}{2} \geq 2 > 0$. Par conséquent g est dérivable sur $\text{Im } f = \mathbb{R}$. On a

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

(b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

Correction : On sait que f' et g' sont de même signe dont $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$. Puis, comme la fonction inverse est décroissante, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(f'(g(x)) \geq 2 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \leq \frac{1}{2} \right).$$

2. (a) Montrer que $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, |g(x) - g(x')| \leq \frac{1}{2}|x - x'|$.

Correction : On applique l'égalité des accroissements finis à g entre $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}$.

• Si $x = x'$, on a $|g(x) - g(x')| = 0 = \frac{1}{2}|x - x'|$. L'égalité entraîne l'inégalité.

• Pour $x \neq x'$, sans perte de généralité, on peut supposer que $x < x'$. L'application g est continue sur $[x, x']$ et dérivable sur $]x, x'[$ donc il existe $c \in]x, x'[$, $g(x) - g(x') = g'(c)(x - x')$. En valeur absolue, cela entraîne

$$|g(x) - g(x')| = |g'(c)||x - x'| \leq \frac{1}{2}|x - x'|.$$

(b) Montrer que $\ell = 1$ est l'unique point fixe de g .

Correction : • Tout d'abord on vérifie que 1 est un point de g :

$$1 = g(1) \Leftrightarrow f(1) = f(g(1)) = 1.$$

Il suffit de vérifier que 1 est un point fixe de f : $f(1) = \frac{1+4-3}{2} = 1$.

• On montre l'unicité par l'absurde. Soit $\ell \neq 1$ un autre point fixe de g . Alors, $g(\ell) = \ell$ et

$$|g(\ell) - g(1)| = |\ell - 1| \leq \frac{1}{2}|\ell - 1| \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde. Donc 1 est le seul point fixe de f .

(c) Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$ converge vers 1.

Correction : On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 1|.$$

Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 1| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $u_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, c'est-à-dire $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.