Corrigé du Test 2 - P2023

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : (9 points)

1. Soit P un polynôme de degré 3.

   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Écrire la formule de Taylor pour P à l'aide des dérivées successives $P^{(k)}(a)$, avec $k \in \mathbb{N}$.

   Correction : $P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \dfrac{P''(a)}{2}(x-a)^2 + \dfrac{P^{(3)}(a)}{6}(x-a)^3$

   (b) On suppose que pour $k = 0, 1, 2, 3$ on a $P^{(k)}(1) = 6$. Montrer que l'expression $P(x)$ est de la forme
   $$P(x) = c_0 + c_1 x + c_3 x^3,$$
   où c_0, c_1 et c_3 sont des entiers naturels à préciser.

   Correction : Il suffit de développer la formule de Taylor précédente avec $a = 1$
   $$\begin{aligned} P(x) &= 6 + 6(x-1) + \frac{6}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{6}(x-1)^3 \\ &= 6 + 6x - 6 + 3x^2 - 6x + 3 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ &= 2 + 3x + x^3. \end{aligned}$$

2. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en $a = 0$ à l'ordre 3.

   Correction : Il existe une fonction ε telle que
   $$\forall\, x > -1,\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{et } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

3. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ en $a = 0$ à l'ordre 3.

   Correction : Il existe une fonction ε telle que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$ et $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Pour $x \in I =]-1, +\infty[$, on pose $f(x) = P(x) - 2\cos(x) + \alpha\ln(1+x)$.

   (a) Déterminer (en fonction de α) les constantes réelles β_2 et β_3 de sorte que
   $$\forall\, x \in I,\ f(x) = (\alpha+3)x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

   Correction :
   $$\begin{aligned} f(x) =& [2 + 3x + x^3] - 2[1 - \tfrac{x^2}{2}] + \alpha[x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3}] + x^3\varepsilon(x) \\ =& (3+\alpha)x + \big(1 - \frac{\alpha}{2}\big)x^2 + \big(1 + \frac{\alpha}{3}\big)x^3 + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

(b) Justifier que la fonction f est un infiniment petit au voisinage de $a = 0$.
En fonction des valeurs de α, préciser sa partie principale.

Correction : • La fonction f est continue donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = P(0) - 2\cos(0) + \alpha \ln 1 = 2 - 2 = 0.$$

Quelque soit la valeur de α, $f(x)$ est un infiniment petit au voisinage de 0.
• Si $\alpha \neq -3$, alors la partie principale est $(3+\alpha)x$;
Si $\alpha = -3$ alors la partie principale est $\frac{5}{2}x^2$.

Exercice 2 (Barème approximatif : (4 points)
Soit f la fonction définie sur $I = [-1, 1]$ par $f(x) = (x-1)\text{Arcsin}(x)$.

1. À l'aide du théorème de Rolle, montrer qu'il existe $c \in \,]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.
   Correction : • L'application f est le produit d'un polynôme avec Arcsin. Celle-ci est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$, donc f l'est aussi.
   • On a $f(0) = -\text{Arcsin}(0) = 0$ et $f(1) = 0 = f(0)$.
   • D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$. (On ne cherche pas à déterminer la valeur de c).
2. Montrer que $\forall\, x \in \,]-1, 1[,\ f''(x) = \dfrac{2 - x - x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
   Correction : La dérivée première est $f'(x) = \text{Arcsin}(x) + \dfrac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}$. La dérivée seconde est

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2} - (x-1) \times \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} &= \frac{1-x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(1-x^2) + x(x-1)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2-x-x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

3. En déduire que f admet un extremum global sur I et préciser sa nature : minimum ou maximum. (*Indication : étudier le signe de f'' sur $]-1, 1[$.*)
   Correction : On détermine le signe de f'' sur $]-1, 1[$: le signe de f'' est donnée par le signe de $2 - x - x^2$. On a $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 > 0$. On cherche les deux racines

$$x_1 = \frac{1-3}{-2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+3}{-2} = -2.$$

   Le polynôme est négatif à l'extérieur des racines et positif sur $[-2, 1]$. On en déduit que la dérivée seconde est positive et que le fonction est convexe. Toute fonction convexe sur un intervalle I dont la dérivée première s'annule au moins une fois sur I admet un minimum global : $\forall\, x \in [-1, 1], f(x) \geq f(c)$.

Exercice 3 (Barème approximatif : (7 points)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x - 3}{2}$. On admet que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et on note g son application réciproque.

(a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et rappeler l'expression de g' en fonction de f' et g.

Correction : L'application f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{3x^2+4}{2} \geq 2 > 0$. Par conséquent g est dérivable sur $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$. On a

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

(b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

Correction : On sait que f' et g' sont de même signe dont $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) > 0$. Puis, comme la fonction inverse est décroissante, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Big(f'(g(x)) \geq 2 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \leq \frac{1}{2}\Big).$$

2. (a) Montrer que $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ |g(x) - g(x')| \leq \frac{1}{2}|x - x'|$.

Correction : On applique l'égalité des accroissements finis à g entre $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}$.

• Si $x = x'$, on a $|g(x) - g(x')| = 0 = \frac{1}{2}|x - x'|$. L'égalité entraîne l'inégalité.

• Pour $x \neq x'$, sans perte de généralité, on peut supposer que $x < x'$. L'application g est continue sur $[x, x']$ et dérivable sur $]x, x'[$ donc il existe $c \in]x, x'[,\ g(x) - g(x') = g'(c)(x - x')$. En valeur absolue, cela entraîne

$$|g(x) - g(x')| = |g'(c)||x - x'| \leq \tfrac{1}{2}|x - x'|.$$

(b) Montrer que $\ell = 1$ est l'unique point fixe de g.

Correction : • Tout d'abord on vérifie que 1 est un point de g :

$$1 = g(1) \Leftrightarrow f(1) = f(g(1)) = 1.$$

Il suffit de vérifier que 1 est un point fixe de f : $f(1) = \frac{1+4-3}{2} = 1$.

• On montre l'unicité par l'absurde. Soit $\ell \neq 1$ un autre point fixe de g. Alors, $g(\ell) = \ell$ et

$$|g(\ell) - g(1)| = |\ell - 1| \leq \frac{1}{2}|\ell - 1| \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{2},$$

ce qui est abusrde. Donc 1 est le seul point fixe de f.

(c) Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$ converge vers 1.

Correction :

(i) étape 1 : on pose $x = u_n$ et $x' = \ell$ dans **2.(a)** et on obtient $|g(u_n) - g(1)| = |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$.

(ii) étape 2 : On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 1| \leq (\frac{1}{2})^n|u_0 - 1|$.
Initialisation à $n = 0$: on a $|u_0 - 1| = (\frac{1}{2})^0|u_0 - 1|$, l'égalité entraîne l'inégalité.
Hérédité : Soit $n \geq 0$, tel que $|u_n - 1| \leq (\frac{1}{2})^n|u_0 - 1|$. D'après l'étape 1 on a
$|u_{n+1} - 1| \leq (\frac{1}{2})|u_n - 1| \underset{\text{par Hyp. Réc.}}{\Rightarrow} |u_{n+1} - 1| < (\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2})^n|u_0 - 1| = (\frac{1}{2})^{n+1}|u_0 - 1|$.
La proposition est vraie au rang $n + 1$.

(iii) étape 3 : La suite de terme général $(\frac{1}{2})^n|u_0 - 1|$ est une suite géométrique de raison $0 < K = (\frac{1}{2}) < 1$ donc elle converge vers 0. D'après le corollaire 1 du théorème des gendarmes, la suite $u_n - 1 \underset{n\to\infty}{\to} 0$. De façon équivalente, $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$.