MT02 - Test 2 (45 min) - P2023

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : 8 points)

1. Soit P un polynôme de degré 3.
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Écrire la formule de Taylor pour P à l'aide des dérivées successives $P^{(k)}(a)$, avec $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Dans cet exercice, on suppose que pour $k = 0, 1, 2, 3$ on a $P^{(k)}(1) = 6$. Montrer que l'expression $P(x)$ est de la forme
   $$P(x) = c_0 + c_1 x + c_3 x^3,$$
   où c_0, c_1 et c_3 sont des entiers naturels à préciser.
2. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en $a = 0$ à l'ordre 3.
3. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ en $a = 0$ à l'ordre 3.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Pour $x \in I =]-1, +\infty[$, on pose $f(x) = P(x) - 2\cos(x) + \alpha \ln(1+x)$.
   (a) Déterminer (en fonction de α) les constantes réelles β_2 et β_3 de sorte que
   $$\forall\, x \in I,\ f(x) = (\alpha+3)x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + x^3 \varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$
   (b) Justifier que la fonction f est un infiniment petit au voisinage de $a = 0$.
   En fonction des valeurs de α, préciser sa partie principale.

Exercice 2 (Barème approximatif : 5 points)
Soit f la fonction définie sur $I = [-1, 1]$ par $f(x) = (x-1)\text{Arcsin}(x)$.

1. À l'aide du théorème de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Montrer que $\forall\, x \in]-1, 1[,\ f''(x) = \dfrac{2 - x - x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
3. En déduire que f admet un extremum global sur I et préciser sa nature : minimum ou maximum. (*Indication : étudier le signe de f'' sur $]-1, 1[$.*)

Exercice 3 (Barème approximatif : 7 points)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x - 3}{2}$. On admet que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et on note g son application réciproque.
   (a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et rappeler l'expression de g' en fonction de f' et g.
   (b) En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$.
2. (a) Montrer que $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ |g(x) - g(x')| \leq \frac{1}{2}|x - x'|$.
   (b) Montrer que $\ell = 1$ est l'unique point fixe de g.
   (c) Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$ converge vers 1.