Final MT90/MA90 - P2018

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Barème approximatif (6, 4, 5, 7).

**Exercice 1 - CHANGER DE COPIE**

Dans cet exercice, les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $\Omega$ et $a \in \Omega$. Rappeler la définition avec quantificateurs de « $f$ est continue en a ».

   (b) Utiliser cette définition pour montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ est continue en 0.
   *(Indication : on remarquera que $f(x) - 1 \geq 0$.)*

2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $f$ la fonction définie sur $]-1\,,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{(\sin x)^2}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \ell. \end{cases}$

   (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

   (b) Pour quelle valeur de $\ell$, la fonction $f$ est-elle continue en 0 ?

   *Dans toute la suite de l'exercice on choisit cette valeur de $\ell$.*

   (c) Montrer que la fonction $f$ est dérivable en 0, puis préciser la valeur de $f'(0)$.

   (d) Justifier que $f$ est dérivable sur $]-1\,,+\infty[$, puis montrer que pour $x \neq 0$ on a
   $$f'(x) = \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)} - \frac{(\sin x)^2}{(1+x)(\ln(1+x))^2}.$$

   (e) La fonction $f'$ est-elle continue sur $]-1\,,+\infty[$ ? Justifier votre réponse.

**Exercice 2 - CHANGER DE COPIE**

Dans cet exercice, les parties I, II et III sont indépendantes.

On définit la fonction $f$ sur $[0\,,\pi]$ par $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$.
On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $[0,\pi]$ et que $\forall\, x \in\ [0\,,\pi],\ f'(x) = -\frac{1}{2} f(\pi - x)$.

**Partie I - CHANGER DE COPIE**

1. Quelle est la nature de $\operatorname{Im} f$ ? *(soyez le plus précis possible).*
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$.
3. Déterminer $K = \displaystyle\max_{x\in[0,\pi]} |f'(x)|$.

4. Montrer que la fonction $f$ est bijective de $[0\,,\pi]$ vers $\operatorname{Im} f$.

   *On ne demande pas de déterminer l'expression algébrique de* $f^{-1}(x)$.
5. Sur quel intervalle la fonction $f^{-1}$ est-elle dérivable ?
6. Pour $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$, calculer $f^{-1}(b)$, puis $(f^{-1})'(b)$.

## Partie II - CHANGER DE COPIE

On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}$, la notation $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n$-ième de la fonction $f$ et $f^{(0)} = f$.

1. (QUESTION BONUS) Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f$ est $(2n)$ fois dérivable et que pour tout $x \in [0\,,\pi]$ on a

$$f^{(2n-1)}(x) = 2(-\tfrac{1}{4})^n f(\pi - x) \quad \text{et} \quad f^{(2n)}(x) = (-\tfrac{1}{4})^n f(x)\,.$$

2. Soit $a \in [0\,,\pi]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la série

$$S_n = f'(a) + f''(a) + f^{(3)}(a) + \cdots + f^{(2n-1)}(a) + f^{(2n)}(a) = \sum_{k=1}^{2n} f^{(k)}(a).$$

   (a) Donner une condition nécessaire sur $f^{(n)}(a)$ pour que la série $S_n$ converge.

   (b) Démontrer cette condition nécessaire.

   (c) Montrer que

$$S_n = (2f(\pi - a) + f(a)) \sum_{k=1}^{n} (-\tfrac{1}{4})^k.$$

   (d) En déduire que la série $S_n$ converge vers une limite à préciser.

## Partie III - CHANGER DE COPIE

1. (a) Montrer que la fonction $f$ admet au moins un point fixe $\ell \in ]0\,,\pi[$.
   *(Utiliser la fonction $g$ définie par $g(x) = f(x) - x$.)*

   (b) En utilisant les variations de $f$, démontrer par l'absurde que $f$ admet un unique point fixe.

   *On rappelle que le réel $K$ est défini à la question* **Partie I - 3.**
   *Dans la suite de l'exercice on admet que* $0 < K < 1$.

2. Soit $(u_n)$ la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \; [0, \pi]\;, \\ u_{n+1} = f(u_n)\;,\; \forall n \in \mathbb{N}\;. \end{cases}$$

   (a) Justifier que la suite $(u_n)$ est bien définie.

   (b) Énoncer le théorème des accroissements finis.

   (c) Montrer que
$$\forall (x, x') \in [0, \pi]^2,\; |f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|\;.$$

   (d) Montrer, par récurrence sur $n$, que $\forall n \in \mathbb{N}\;,\; |u_n - \ell| \leq K^n |u_0 - \ell|$.

   (e) En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$.