Final MT90/MA90 - P2019

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Barème approximatif (7, 8, 6).

## Exercice 1 - CHANGER DE COPIE

L'exercice 1 contient 2 parties !

### Partie I

Soit $a > 0$. On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $\Omega = ]-a\,, a\,[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) .$$

1. Montrer que $\forall\, x \in \Omega,\ f'(x) = \dfrac{2a}{a^2 - x^2}$ et indiquer le sens de variation de $f$ sur $\Omega$.
2. À l'aide d'un théorème du cours, préciser la nature de $\mathrm{Im} f = f(\Omega)$. *(Soyez le plus précis possible.)*
3. Calculer $f(0)$, puis déterminer $\lim\limits_{x \to -a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.
4. Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $g$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. *(On ne demande pas de déterminer l'expression algébrique de $g(x)$.)*
5. (a) Donner l'expression de la dérivée $g'$ en fonction de $f'$ et $g$, puis dresser le tableau de variation de $g$. *(On précisera, dans ce tableau, les limites de $g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.)*
   (b) Préciser la valeur de $g(0)$, puis déterminer $K = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |g'(x)|$.
6. (a) Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ avec $x < x'$. Énoncer le théorème sur l'égalité des accroissements finis pour la fonction $g$ sur l'intervalle $[x, x']$.
   (b) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |g(x)| \leq \frac{a}{2}|x|$.

### Partie II

Soit $(u_n)$ la suite récurrente définie pour $n \geq 0$ par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$, où $g$ est la fonction introduite à la question **I) 4.** On définit la série $S_n$, de terme général $u_n$, comme suit

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Que peut-on dire de $S_n$ si $u_0 = 0$ ?

   *Dans la suite de l'exercice, on suppose que $u_0 \neq 0$.*
2. (a) Montrer, par récurrence sur $n \geq 0$, que la suite $(u_n)$ est de signe constant.
   (b) En déduire que la suite $(S_n)$ est strictement monotone. *(Indication : distinguer les cas $u_0 < 0$ et $u_0 > 0$.)*

3. Montrer, par récurrence sur $n$, que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \left(\frac{a}{2}\right)^n |u_0|$.
4. (a) Rappeler la condition nécessaire de convergence de la série $S_n$.

   (b) Pour quelles valeurs de $a > 0$ cette condition nécessaire est-elle vérifiée, quel que soit le choix de $u_0 \in \mathbb{R}^*$ ?

   *Dans la suite de l'exercice, on considère une telle valeur de $a$.*

5. On pose $q = \frac{a}{2}$ et on définit la série géométrique

$$G_n = 1 + q + \cdots + q^n.$$

   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n| \leq |u_0| G_n$.

6. Donner une autre expression de $G_n$ en fonction de $n$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, G_n \leq \frac{1}{1-q}$.
7. Montrer que, quel que soit le choix de $u_0 \in \mathbb{R}^*$, la série $S_n$ converge. *(On ne demande pas de déterminer sa limite.)*

**Exercice 2 - CHANGER DE COPIE**

Les questions 1, 2 sont indépendantes.

1. (a) On note $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition d'une fonction $f$. Rappeler la caractérisation à l'aide des suites de la proposition "$f(x)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand $x$ tend vers $a$".

   (b) On définit la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = 1, & \text{si } x \in A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}, \\ f(x) = 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

   La fonction $f$ admet-elle une limite finie quand $x \to 0$ ?

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante

$$\begin{cases} g(x) = \alpha x + \beta \sin x + x^2 \text{Arctan}\dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

   (a) Montrer que la fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}$. *(On ne demande pas d'utiliser la définition avec quantificateurs.)*

   (b) Montrer que la fonction $g$ est dérivable en $x = 0$. On précisera la valeur de $g'(0)$.

   (c) Justifier que la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$.

   (d) La fonction dérivée $g'$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?