Final MT90 - P2020

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (4 points)
Dans cet exercice, les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to]0\,,1[$ la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{|x-1|}}$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 0$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Résoudre, selon les cas $\varepsilon < 1$ et $\varepsilon \geq 1$, l'inéquation $f(x) < \varepsilon$.
   (b) Montrer, à l'aide de la définition avec quantificateurs, que f est continue en $a = 1$.
2. (a) On note $\mathcal{D}_g$ le domaine de définition d'une fonction g. Donner une caractérisation à l'aide des suites de la proposition "$g(x)$ n'admet pas de limite quand x tend vers a".
   (b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $g(x) = \sin\big(\ln|x|\big)$. À l'aide des suites, démontrer que la fonction g n'admet pas de limite en 0.
   (Indication : choisir convenablement la suite (x_n) telle que $g(x_n) = (-1)^n$.)

Exercice 2 (7 points)
Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. On admet que la série harmonique de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$.
   (a) Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[a\,,b]$ et dérivables sur $]a\,;b[$ avec $a < b$. On suppose que $\forall t \in]a\,;b[, f'(t) \leq g'(t)$. Montrer que
   $$\forall (x_1, x_2) \in\ [a\,;b]^2, \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq g(x_2) - g(x_1)\ .$$
   (Indication : Appliquer l'égalité des accroissements finis sur l'intervalle $[x_1\,,x_2]$ à la fonction h définie par $h(t) = g(t) - f(t)$).
   (b) En déduire que
   $$\forall x \in\ [0,1], \quad \text{Arctan}(x) \geq \alpha x\ ,$$
   où $\alpha > 0$ est une constante à préciser.
   (c) Montrer que la série de terme général $\sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}(\frac{1}{k})$ diverge vers $+\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la série de terme général $S_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}(\frac{2}{k^2})$.
   (a) Soit $a > 0$ un réel fixé. On définit la fonction f sur $[0, +\infty[$ par
   $$f(x) = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}(\tfrac{a-x}{1+ax}).$$
   Montrer que la fonction f est contante et $\forall\, x \in [0, +\infty[,\ f(x) = \text{Arctan}\, a$.
   (b) En déduire que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \text{Arctan}(\frac{2}{k^2}) = \text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k-1)$.
   (Indication : Choisir convenablement a et x).
   (c) Montrer que la série S_n converge et préciser sa limite.
   (Indication : simplifier l'expression de S_n).

Exercice 3 (11 points)

On définit la fonction f sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-2}$.

Partie I - CHANGER DE COPIE

1. Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$ et $f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.
2. D'après les variations de f, déterminer $\operatorname{Im} f = f([0,1])$.
3. (a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque définie et continue sur $\operatorname{Im} f$. *On ne demande pas de déterminer l'expression algébrique de $f^{-1}(x)$.*
   (b) Sur quel intervalle la fonction f^{-1} est-elle dérivable ?
   (c) Pour $c = \frac{2}{3}$, calculer $f^{-1}(c)$, puis $(f^{-1})'(c)$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$, notée d.
5. Déterminer $f([0,d])$ et $f([d,1])$.

Partie II - CHANGER DE COPIE

Dans cette partie, on admet le résultat suivant :

$$\Big(x \in]0,d[\Rightarrow f \circ f(x) < x\Big) \quad \text{et} \quad \Big(x \in]d,1[\Rightarrow f \circ f(x) > x\Big)$$

1. Montrer que l'application $f \circ f$ admet exactement 3 points fixes dans $[0,1]$.
2. Soit (u_n) la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] , \\ u_{n+1} = f \circ f(u_n) , \ \forall n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

   (a) En supposant $u_0 = d$, que peut-on dire de la suite (u_n) ?
   (b) Dans cette question on suppose que $u_0 \in [0,d[$.
      i. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
      ii. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
   (c) Dans cette question on suppose que $u_0 \in]d,1]$.
      i. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
      ii. Montrer que la suite (u_n) converge vers 1.
3. Soit (v_n) la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} v_0 \in [0,1] , \\ v_{n+1} = f(v_n) , \ \forall n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

   Déterminer la seule valeur de v_0 pour laquelle la suite (v_n) converge.
   (Indication : Étudier les suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}).)