Corrigé du Final MT90 - P2020

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (4 points)
Dans cet exercice, les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to]0\,,1[$ la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{|x-1|}}$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 0$.

(a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Résoudre, selon les cas $\varepsilon < 1$ et $\varepsilon \geq 1$, l'inéquation $f(x) < \varepsilon$.

Correction : • Soit $\varepsilon < 1$. Alors

$$e^{-\frac{1}{|x-1|}} < \varepsilon < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{|x-1|} < \ln\varepsilon < 0 \Leftrightarrow |x-1| < -\frac{1}{\ln\varepsilon}.$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle centré en $a = 1$: $]1-\eta, 1+\eta[$ avec $\eta = -\frac{1}{\ln\varepsilon} > 0$.
• Soit $\varepsilon \geq 1$. Le fonction exp est croissante donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ -\frac{1}{|x-1|} < 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) < e^0 = 1 \leq \varepsilon.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

(b) Montrer, à l'aide de la définition avec quantificateurs, que f est continue en $a = 1$.

Correction : Il faut montrer la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \Big(|x-1| < \eta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon\Big).$$

On remarquera que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = f(x)$. D'après la question **1.**
• Pour $0 < \varepsilon < 1$, on pose $\eta = -\frac{1}{\ln\varepsilon} > 0$. Ainsi, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$|x-1| < \eta \Rightarrow f(x) = |f(x)| < \varepsilon.$$

• Pour $\varepsilon \geq 1$, on pose $\eta = 1$ (toute valeur strictement positive convient). Ainsi, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$|x-1| < \eta \Rightarrow f(x) = |f(x)| < 1 \leq \varepsilon.$$

La définition avec quantificateurs de la continuité de f en $a = 1$ est démontrée.

2. (a) On note $\mathcal{D}_g$ le domaine de définition d'une fonction g. Donner une caractérisation à l'aide des suites de la proposition "$g(x)$ n'admet pas de limite quand x tend vers a".

Correction :

$$g(x) \text{ n'admet pas de limite en } a \Leftrightarrow \exists (x_n), \begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathcal{D}_g \\ x_n \underset{n\to+\infty}{\to} a \end{cases} \text{ et } (f(x_n)) \text{ diverge.}$$

(b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $g(x) = \sin\big(\ln|x|\big)$. À l'aide des suites, démontrer que la fonction g n'admet pas de limite en 0.
(Indication : choisir convenablement la suite (x_n) telle que $g(x_n) = (-1)^n$.)

Correction : Comme $\operatorname{Im} g \subset [-1,1]$, on cherche une suite (x_n) qui converge vers 0 vérifiant $g(x_n) = (-1)^n$. On a $\forall n \in \mathbb{Z},\ (-1)^n = \sin(n\pi + \frac{\pi}{2})$. Pour $n \geq 0$, on résout alors

$$\sin\big(\ln|x_n|\big) = \sin(n\pi + \tfrac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \ln|x_n| = n\pi + \tfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x_n = e^{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

Pour $n \leq 0$, on pose $k = -n \geq 0$ et on résout

$$\sin\big(\ln|x_k|\big) = \sin(-k\pi + \tfrac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x_k = e^{-k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

Seule la dernière suite vérifie $x_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$ et $\big(f(x_k) = (-1)^k\big)$ diverge.

Exercice 2 (7 points)

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. On admet que la série harmonique de terme général $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$.

   (a) Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[a\,,b]$ et dérivables sur $]a\,;b[$ avec $a < b$. On suppose que $\forall t \in\,]a\,;b[, f'(t) \leq g'(t)$. Montrer que

   $$\forall (x_1, x_2) \in\ [a\,;b]^2\,, \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq g(x_2) - g(x_1)\ .$$

   (Indication : Appliquer l'égalité des accroissements finis sur l'intervalle $[x_1\,, x_2]$ à la fonction h définie par $h(t) = g(t) - f(t)$).

   Correction : • Soient $(x_1, x_2) \in\ [a\,;b]$ tels que $x_1 \leq x_2$. Par somme de fonctions définies et continues sur $[x_1, x_2] \subset [a\,,b]$ et dérivables sur $]x_1, x_2[\subset]a\,;b[$, la fonction h l'est aussi. D'après l'égalité des accroissements finis, on sait qu'il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que

   $$h(x_2) - h(x_1) = h'(c)(x_2 - x_1).$$

   • Or $f'(c) \leq g'(c) \Rightarrow h'(c) \geq 0$. D'où

   $$x_1 \leq x_2 \Rightarrow h(x_2) - h(x_1) \geq 0 \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) \geq f(x_2) - f(x_1).$$

   (b) En déduire que

   $$\forall x \in\ [0,1], \quad \operatorname{Arctan}(x) \geq \alpha x\ ,$$

   où $\alpha > 0$ est une constante à préciser.

   Correction : On applique le résultat précédent aux fonctions $g(x) = \operatorname{Arctan}$ et $f(x) = \alpha x$. Pour tout $x \in]0,1[$, on a

   $$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{2}.$$

   On pose alors $\alpha = \frac{1}{2}$ et les hypothèses de la question **1a).** sont vérifiées. On déduit avec $x_2 = x$ et $x_1 = 0$ que

   $$\forall\, x \in [0,1], \quad g(x) \geq f(x).$$

   Autrement dit,

   $$\forall\, x \in [0,1],\ \operatorname{Arctan}(x) \geq \tfrac{1}{2}x.$$

(c) Montrer que la série de terme général $\sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}(\frac{1}{k})$ diverge vers $+\infty$.

Correction : • Tout d'abord on remarque que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k} \in [0,1]$. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \text{Arctan}(\tfrac{1}{k}) \geq \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{k}.$$

Par sommation, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}(\frac{1}{k}) \geq \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Comme $\frac{1}{2} > 0$, la série $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$. D'après les théorèmes de comparaison des suites, la série $\sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}(\frac{1}{k})$ diverge également.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définie la série de terme général $S_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}(\frac{2}{k^2})$.

(a) Soit $a > 0$ un réel fixé. On définit la fonction f sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}(\tfrac{a-x}{1+ax}).$$

Montrer que la fonction f est contante et $\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = \text{Arctan}\, a$.

Correction : Montrons que $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = 0$, puis calculons $f(0)$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(-1)(1+ax)-a(a-x)}{(1+ax)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{a-x}{1+ax}\right)^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1-a^2}{(1+ax)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{a-x}{1+ax}\right)^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+a^2}{(1+ax)^2+(a-x)^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+a^2}{(1+2ax+a^2x^2)+(a^2-2ax+x^2)} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+a^2}{(1+a^2)(1+x^2)} = 0
\end{aligned}$$

On en déduit que f est constante sur $[0,+\infty[$. On a alors

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = f(0) = \text{Arctan}(0) + \text{Arctan}(a) = \text{Arctan}(a).$$

(b) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \text{Arctan}(\frac{2}{k^2}) = \text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k-1)$.
(Indication : Choisir convenablement a et x).

Correction : On pose $x = k-1$ et $a = k+1$ et on obtient

$$\text{Arctan}\,(k+1) + \text{Arctan}(\tfrac{(k+1)-(k-1)}{1+(k+1)(k-1)}) = \text{Arctan}\,(k-1)$$

$$\Leftrightarrow \text{Arctan}\,(k+1) - \text{Arctan}\,(k-1) = \text{Arctan}(\tfrac{2}{1+k^2-1}) = \text{Arctan}(\tfrac{2}{k^2})$$

(c) Montrer que la série S_n converge et préciser sa limite.
(Indication : simplifier l'expression de S_n).

Correction : On utilise l'égalité obtenue à la question **2 b)** pour simplifier l'expression de S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}[\text{Arctan}\,(k+1) - \text{Arctan}\,(k-1)] \\ &= \sum_{k=2}^{n+1}\text{Arctan}(k) - \sum_{k=0}^{n-1}\text{Arctan}(k) \\ &= \text{Arctan}(n+1) + \text{Arctan}(n) - \text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0). \end{aligned}$$

On utilise les résultats suivants

$$\lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ et } \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4},\ \text{Arctan}(0) = 0.$$

On en déduit que la série S_n converge et sa limite vaut $\ell = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 3 (12 points)

On définit la fonction f sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-2}$.

Partie I - CHANGER DE COPIE

1. Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$ et $f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.

   Correction : l'expression $\frac{x^2+x-2}{x-2}$ est un quotient de polynôme donc dérivable tant que le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi f est dérivable sur $[0,1] \subset \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2+x-2)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-3x-2-x^2-x+2)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

2. D'après les variations de f, déterminer $\text{Im}\, f = f([0,1])$.

   Correction : On détermine le signe de f' sur $[0,1]$ et on complète le tableau de variation de f.

$$\forall x \in [0,1], f'(x) < 0 \qquad \text{et } f(0) = 1,\ f(1) = 0.$$

x	0	1
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

   On en déduit que $\text{Im}\, f = [0,1]$.

3. (a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque définie et continue sur $\text{Im}\, f$. *On ne demande pas de déterminer l'expression algébrique de $f^{-1}(x)$.*

   Correction : La fonction f est continue et strictement monotone sur de $[0,1]$ dans lui même donc elle admet une application réciproque g elle même définie et continue $[0,1]$ dans lui même.

(b) Sur quel intervalle la fonction f^{-1} est-elle dérivable ?

Correction : La fonction f^{-1} est dérivable dès lors que $f' \circ f^{-1}$ ne s'annule pas. Dans notre cas, f^{-1} est dérivable sur $]0,1]$.

(c) Pour $c = \frac{2}{3}$, calculer $f^{-1}(c)$, puis $(f^{-1})'(c)$.

Correction : • Calcul de $f^{-1}(\frac{2}{3})$:

$$f^{-1}(\tfrac{2}{3}) = x \Leftrightarrow \tfrac{2}{3} = f(x) \Leftrightarrow \tfrac{2}{3}(x-2) = x^2+x-2 \text{ et } x \in [0,1] \Leftrightarrow x^2-\frac{x}{3}+\frac{2}{3} = 0 \text{ et } x \in [0,1]$$

$\Delta = (\frac{1}{3})^2 - 4(-\frac{2}{3}) = \frac{25}{9} = (\frac{5}{3})^2 > 0$. L'équation admet donc 2 solutions $x_1 = \frac{-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}{2} = \frac{2}{3}$. On déduit que

$$\boxed{f^{-1}(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3}}.$$

• Calcul de $(f^{-1})'(\frac{2}{3})$:

$$f^{-1}(\tfrac{2}{3}) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(\frac{2}{3})\big)} = \frac{1}{f'(\frac{2}{3})} = \frac{(\frac{2}{3}-2)^2}{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-4)} = \boxed{-\frac{4}{5}}.$$

4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$, notée d.

Correction : Soit on résout l'équation $f(x) = x$ algébriquement dans l'intervalle $]0,1[$, soit on applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$ et on démontre l'unicité par l'absurde sachant que f est strictement décroissante.

Appliquons la deuxième méthode.

• Par somme de fonctions continues (f et un polynôme) sur $[0,1]$, la fonction g est continue sur $[0,1]$. On a

$$g(0) = f(0) - 0 = 1 > 0 \qquad \text{et } g(1) = f(1) - 1 = 0 - 1 = -1 > 0$$

La nombre $y = 0$ est strictement compris entre $f(0)$ et $f(1)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $d \in]0,1[\subset [0,1]$ tel que $g(d) = 0$, autrement dit $f(d) = d$.

• On vient de montrer que f admet au moins un fixe $d \in [0,1]$. Montrons qu'il est unique par l'absurde.

Soient $d_1, d_2 \in [0,1]$ tels que $f(d_1) = d_1$ et $f(d_2) = d_2$ et $d_1 \neq d_2$.

$$d_1 \neq d_2 \Leftrightarrow d_1 < d_2 \text{ ou } d_2 > d_1.$$

$$d_1 < d_2 \underset{\text{f strict}^{\text{t}} \text{ décroissante}}{\Rightarrow} f(d_1) > f(d_2) \Rightarrow d_1 > d_2$$

On aboutit à une absurdité. Par symétrie, l'hypothèse $d_2 < d_1$ aboutit également à une contradiction. La négation étant absurde, f admet bien un unique point fixe. D'après la question précédente on sait que $d = c = \frac{2}{3}$.

5. Déterminer $f([0,d])$ et $f([d,1])$.

Correction : D'après les variations de f on a

$$f([0,d]) = [d,1] \qquad \text{et} \qquad f([1,d]) = [0,d].$$

Partie II - CHANGER DE COPIE

Dans cette partie, on admet le résultat suivant :

$$\Big(x \in]0,d[\Rightarrow f\circ f(x) < x\Big) \quad \text{et} \quad \Big(x \in]d,1[\Rightarrow f\circ f(x) > x\Big)$$

1. Montrer que l'application $f\circ f$ admet exactement 3 points fixes dans $[0,1]$.

   Correction : La fonction $f\circ f$ admet au moins 3 points fixes $\{0\,;d\,;1\}$

   $$f\circ f(0) = f(1) = 0, \quad f\circ f(d) = f(d) = d, \quad f\circ f(1) = f(0) = 1.$$

   Elle n'admet pas d'autres points fixes car d'après le résultat admis, l'équation $f\circ f(x) = x$ n'admet aucune solution dans $]0,d[\cup]d,1[$.

2. Soit (u_n) la suite récurrente définie par

   $$\begin{cases} u_0 \in\ [0,1]\ , \\ u_{n+1} = f\circ f(u_n)\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ . \end{cases}$$

   (a) En supposant $u_0 = d$, que peut-on dire de la suite (u_n) ?

   Correction : On montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = d$.
   Soit $H(n) :=$ « $u_n = d$ ».
   <u>Initialisation à $n = 0$</u> : par hypothèse $u_0 = d$ donc $H(0)$ est vraie.
   <u>hérédité</u> : Pour $n \geq 0$ fixé, on montre $H(n) \Rightarrow H(n+1)$.

   $$u_{n+1} = f\circ f(u_n) = f(f(d)) = d.$$

   L'hérédité est démontrée.
   On conclut que la suite (u_n) est constante.

   (b) Dans cette question on suppose que $u_0 \in [0,d[$.

   i. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

   Correction : Puisque $u_0 \in [0,d[$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,d[$.
   Pour $n \geq 0$, fixé, on a donc

   $$u_{n+1} - u_n = f\circ f(u_n) - u_n < 0.$$

   La suite u_n est strictement décroissante.

   ii. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

   Correction : La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un point fixe de f. Soit ℓ cette limite. On a nécessairement

   $$0 \leq \ell \leq u_0 < d,$$

   donc il reste $\ell = 0$.

(c) Dans cette question on suppose que $u_0 \in]d, 1]$.

i. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Correction : Puisque $u_0 \in]d, 1]$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in]d, 1]$.
Pour $n \geq 0$, fixé, on a donc

$$u_{n+1} - u_n = f \circ f(u_n) - u_n > 0.$$

La suite u_n est strictement croissante.

ii. Montrer que la suite (u_n) converge vers 1.

Correction : La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers un point fixe de f. Soit ℓ cette limite. On a nécessairement

$$d < u_0 \leq \ell \leq 1,$$

donc il reste $\ell = 1$.

3. Soit (v_n) la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} v_0 \in \ [0, 1]\ , \\ v_{n+1} = f(v_n)\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ . \end{cases}$$

Déterminer la seule valeur de v_0 pour laquelle la suite (v_n) converge.
(Indication : Étudier les suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}).)

Correction : • Si $v_0 = d$ alors la suite (v_n) est constante égale à d et donc convergente.
• Si $v_0 \in [0, d[$ alors $v_1 \in]d, 1]$. Les suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) vérifient

$$\begin{cases} v_0 \in \ [0, d[\ , \\ v_{2(n+1)} = f \circ f(v_{2n})\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ . \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_1 \in]1, d]\ , \\ v_{2(n+1)+1} = f \circ f(v_{2n+1})\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ . \end{cases}$$

D'après les question précédentes, on en déduit que (v_{2n}) converge vers 0 et (v_{2n+1}) converge vers 1.
Par contraposée d'une propriété de cours, la suite (v_n) diverge.
• Si $v_0 \in]d, 1]$ alors $v_1 \in [0, d[$. Les suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) vérifient

$$\begin{cases} v_0 \in]d, 1]\ , \\ v_{2(n+1)} = f \circ f(v_{2n})\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ . \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_1 \in \ [d, 0[\ , \\ v_{2(n+1)+1} = f \circ f(v_{2n+1})\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ . \end{cases}$$

D'après les question précédentes, on en déduit que (v_{2n}) converge vers 1 et (v_{2n+1}) converge vers 0.
Par contraposée d'une propriété de cours, la suite (v_n) diverge.
• Conclusion : La suite (v_n) converge si et seulement si $v_0 = d$.