Médian MT90 - P2018

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 11) **CHANGER DE COPIE**
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Soient P et Q deux propositions. Les propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?
   (a) $(\text{non}\, P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$.
   (b) $\big((P \Rightarrow Q) \text{ et non}\, Q\big) \Rightarrow \text{non}\, P$.
2. Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit ouvert si la propriété suivante est vérifiée :
$$\forall\, x \in A,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ (y \in]x-\eta\,, x+\eta[\Rightarrow\ y \in A)\ .$$
   (a) Écrire la négation de la proposition ci-dessus.
   (b) Montrer que l'intervalle $[0\,, 1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.
3. (a) Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Donner, en utilisant les quantificateurs, la définition de
      i. « f n'est pas injective de E dans F ».
      ii. « f est bijective de E dans F ».
   (b) Soit B une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to B$ l'application définie par
$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$
      i. Pour $x \neq 0$, calculer $f(\frac{1}{x})$.
      ii. En supposant $B = \mathbb{R}$, l'application f est-elle injective ?
      iii. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction du paramètre a le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation
$$ax^2 - 2x + a = 0\ .$$
      Donner l'expression des solutions, en fonction de a, quand elles existent. *(Indication : distinguer les cas $a = 0$ et $a \neq 0$).*
      iv. Donner une condition nécessaire et suffisante sur B pour que l'application f soit surjective.
      v. Montrer que l'application $g :]0\,, 1[\to]0\,, 1[$ définie par $g(x) = f(x)$ est bijective. Donner l'expression algébrique de g^{-1}.

Exercice 2 (Barème approximatif : 9) **CHANGER DE COPIE**
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n(-1)^n + 1}{n - (-1)^n} = \begin{cases} \frac{n+1}{n-1} & \text{si } n \text{ est pair et } n \geq 2, \\ -\frac{n-1}{n+1} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

   (a) Déterminer une suite (v_n) divergente telle que la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

   (b) En déduire, suivant un raisonnement par l'absurde, que la suite (u_n) diverge.

   (c) Utiliser la définition avec quantificateurs pour montrer que la suite (w_n), définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = u_{2n+1}$, converge vers une limite ℓ à préciser.

   (d) On définit $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

      i. Montrer que A admet une borne inférieure et une borne supérieure. *(Indication : étudier les variations des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).)*

      ii. Démontrer par l'absurde que si A admet un plus grand élément α alors $\sup A = \alpha$. *(On ne demande pas de déterminer α dans cette question).*

      iii. Démontrer que $\inf A = \ell$.

      iv. A admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? Si oui, le donner. Dans tous les cas, démontrer la réponse.

2. On définit la suite (s_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$s_n = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \cdots \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\ .$$

   (a) Montrer que les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes.

   (b) QUESTION BONUS : Que peut-on en déduire sur la suite (s_n) ? *(Faire une démonstration rigoureuse du résultat énoncé).*