Médian MT90 - P2019

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 12 points) **CHANGER DE COPIE**

1. (a) Donner la définition avec quantificateurs de « la suite réelle $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ ».

Correction :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon).$$

(b) Soit $q \in \,]0\,,1[$. Utiliser cette définition pour montrer que la suite géométrique de terme général $v_n = q^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, converge.

Correction : Montrons que $v_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On résout

$$|v_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow q^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln q < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln q} \quad \text{car } \ln q < 0.$$

Prenons $N = \max(E(\frac{\ln \varepsilon}{\ln q}) + 1, 0)$. Ainsi

$$n \geq N \Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln q} \Rightarrow |v_n - 0| < \varepsilon.$$

La convergence de (v_n) vers 0 est démontrée.

2. Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n+1}{5^n}$.

(a) Montrer que la suite (u_n) est strictement monotone.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{5^{n+1}} - \frac{n+1}{5^n} = \frac{n+2-5(n+1)}{5^{n+1}} = -\frac{(4n+3)}{5^{n+1}} < 0.$$

Par conséquent, la suite (u_n) est strictement décroissante.

(b) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $n + 1 \leq 2^n$.

Correction : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{P}(n) :=$« $n + 1 \leq 2^n$ ».

- Initialisation à $n = 0$: on a $0 + 1 = 1 \leq 2^0 = 1$. La proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \geq 0$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a

$$n + 2 = (n+1) + 1 \underset{(\text{par } H.R.)}{\leq} 2^n + 1 \underset{(\text{car } 1 \leq 2^n)}{\leq} 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est démontrée.

- Conclusion : $\forall n \geq 0,\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

(c) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ à préciser.
(On ne demande pas d'utiliser la définition avec quantificateurs dans cette question).

Correction : Soit $n \geq 0$. Alors

$$0 \leq u_n = \frac{n+1}{5^n} \leq \frac{2^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

La suite de terme général $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $0 < q = \frac{2}{5} < 1$. La suite v_n converge vers 0 donc la suite (u_n) aussi d'après le théorème des gendarmes.

(d) On définit $A = \{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.

i. Montrer que A admet une borne inférieure et une borne supérieure.

Correction : La suite (u_n) est une suite de nombre réels et $u_0 \in A$ donc A est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Comme la suite (u_n) converge, elle est bornée. D'après les axiomes des bornes inférieure et supérieure, on en déduit que $\sup A$ et $\inf A$ existent.

ii. A admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? Si oui, le donner. Dans tous les cas, démontrer la réponse.

Correction : • La suite (u_n) étant strictement décroissante et convergente vers 0, on peut ordonner les termes de la suite de la façon suivante

$$u_0 = 1 > u_1 > \cdots > u_n > \cdots \geq 0.$$

L'ensemble A admet un plus grand élément $u_0 = 1$.

• Démontrons que A n'admet pas de plus petit élément par l'absurde. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que u_m soit le plus petit élément de A. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_m \underset{\text{pour } n=m+1}{\Rightarrow} u_{m+1} \geq u_m.$$

Ce qui contredit le fait que (u_n) soit strictement décroissante : $u_{m+1} < u_m$. Donc A n'admet pas de plus petit élément.

iii. Rappeler la caractérisation de la borne inférieure de A à l'aide des quantificateurs.

Correction :

$$\forall x \in A, x \geq \inf A,$$
$$\forall t > \inf A, \exists x \in A,\ x < t.$$

iv. Utiliser cette caractérisation pour démontrer que $\inf A = \ell$.

Correction : Montrons que $\inf A = 0$. On sait déjà que $\ell = 0$ est un minorant de l'ensemble A. Il reste à démontrer que 0 est le plus grand des minorants. Autrement dit,

$$\forall t > 0,\ \exists x \in A,\ t > x\ .$$

preuve : Soit $t > 0$. On utilise la définition de (u_n) converge vers 0 pour $\varepsilon = t$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - 0| < \varepsilon = t).$$

En particulier, pour $n = N$, on a $-t < u_N < t$. On a bien trouvé un élément $x = u_N \in A$ vérifiant $t > x$. La caractérisation de la borne inf est vérifiée. On conclut que $\inf A = 0 = \ell$.

3. On définit les suites (s_n) et (t_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k)^2 \qquad \text{et} \qquad t_n = s_n + \frac{1}{n+1}$$

Montrer que les suites (s_n) et (t_n) sont adjacentes.
(on pourra utiliser le fait que $u_n \leq \frac{1}{n+1}$, après l'avoir justifié.)

Correction : • On a $s_{n+1} - s_n = (u_{n+1})^2 \geq 0$ donc la suite s_n est croissante.
• On a $t_{n+1} - t_n = s_{n+1} + \frac{1}{n+2} - s_n - \frac{1}{n+1} = (u_{n+1})^2 - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
On a aussi

$$0 \leq u_n \leq (\tfrac{2}{5})^n \leq (\tfrac{2}{4})^n = \tfrac{1}{2^n} \underset{\text{d'après } \mathbf{2b)}}{\leq} \frac{1}{(n+1)}.$$

Par conséquent

$$t_{n+1} - t_n \leq \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq 0.$$

La suite (t_n) est décroissante.
• $t_n - s_n = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
On en déduit que les suites (s_n) et (t_n) sont adjacentes.

Exercice 2 (Barème approximatif : 9.5 points) **CHANGER DE COPIE**
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Soient P et Q deux propositions. Les propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?
   (a) $(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$.
   Correction : D'après la table de vérité du connecteur $\Rightarrow$, on étudie les deux cas suivants.
   • Soit l'hypothèse $(P \text{ et } Q)$ est fausse et alors l'implication $(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$ est vraie.
   • Soit l'hypothèse $(P \text{ et } Q)$ est vraie, ce qui signifie que les propositions P et Q sont vraies simultanément. Par conséquent la proposition $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie. L'implication $(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$ est donc encore vraie.
   • On conclut que cette proposition est toujours vraie.
   (b) $(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \text{ et } Q)$.
   Correction : Cette proposition n'est pas toujours vraie. Si P est fausse et Q est fausse alors l'hypothèse $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie, tandis que le but $(P \text{ et } Q)$ est faux. D'après la table de vérité du connecteur $\Rightarrow$, si P et Q sont fausse alors la proposition est fausse.

2. Soit E un ensemble et soient A, B et C trois sous-ensembles de E.
   Montrer que

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad A \backslash (B \backslash C) = (A \cap C).$$

Correction : on peut utiliser les opérations sur les ensembles et leur complémentaire.

$$\begin{aligned} A\backslash(B\backslash C) = A \cap \complement_E \left(B \cap \complement_E C\right) &= A \cap \left(\complement_E B \cup \complement_E (\complement_E C)\right) \\ &= A \cap \left(\complement_E B \cup C\right) \\ &= (A \cap \complement_E B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Si $A \subset B$ alors $(A \cap \complement_E B) = \varnothing$. On en déduit que

$$A\backslash(B\backslash C) = A \cap C.$$

3. Soit D une partie de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

(a) i. Déterminer le nombre de solution(s) de $x^2 - ax + a = 0$, en fonction des valeurs de $a \in \mathbb{R}$. Donner l'expression des solutions lorsqu'elles existent.

Correction : Le discriminant est $\Delta = a^2 - 4a = a(a-4)$.
• $\Delta < 0 \Leftrightarrow a \in]0,4[$. Dans ce cas, l'équation n'admet aucune solution.
• $\Delta = 0 \Leftrightarrow a \in \{0,4\}$. Dans ce cas, l'équation admet une unique solution $x_0 = \frac{a}{2}$.
• $\Delta > 0 \Leftrightarrow a \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$. Dans ce cas l'équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2} = \frac{2a}{a + \sqrt{a^2 - 4a}}.$$

ii. Donner la définition de $\mathrm{Im} f$.

Correction :

$$\mathrm{Im} f = \{y \in \mathbb{R};\ \exists x \in D, y = f(x)\}.$$

iii. Montrer que $y \in \mathrm{Im} f \Rightarrow y \notin]0,4[$.

Correction : On détermine les valeurs de y pour lesquels l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{x-1} \Leftrightarrow y(x-1) = x^2 \text{ et } x \neq 1 \Leftrightarrow x^2 - yx + y = 0 \text{ et } x \neq 1.$$

D'après la question 3(a), cette équation admet une solution si et seulement si $y \notin]0,4[$.

(b) Si $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, la fonction f est-elle injective ?

Correction : Prenons $y = -1$. Alors, d'après la question 3(a)

$$f\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = f\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1.$$

De plus $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \neq x' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $(x, x') \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. La fonction $f : D \to \mathbb{R}$ n'est pas injective.

(c) On suppose dans cette question que $D = [2, +\infty[$.

i. Préciser $\mathrm{Im} f$.

Correction : Tout d'abord

$$\forall y \geq 4, \exists\, x = \tfrac{y+\sqrt{y^2-4y}}{2} \geq \tfrac{y}{2} \geq 2,\ y = f(x).$$

Ensuite, si $y \leq 0$ alors les antécédents possibles vérifient

$$\frac{x^2}{x-1} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x-1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x \notin D.$$

Par conséquent, $\mathrm{Im} f = [4\,, +\infty[$.

ii. L'application $x \mapsto f(x)$ réalise-t-elle une bijection de D vers $\mathrm{Im}\, f$? Si oui, expliciter son application réciproque qu'on notera g. *(ensemble de départ, ensemble d'arrivée et expression algébrique.)* **(1.5 point BONUS)**

Correction : • Par définition de $\mathrm{Im} f$, l'application $x \mapsto f(x)$ est surjective de D sur $\mathrm{Im} f$.

• Ensuite on remarque que si $y > 4$ alors

$$x_2 = \frac{2y}{y+\sqrt{y^2-4y}} < \frac{2y}{y} = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 \notin D.$$

Donc chaque image $y \geq 4$ admet un unique antécédent $x_1 = \frac{y+\sqrt{y^2-4y}}{2} \in D$. L'application est bijective.

• L'application réciproque est $g : [4, +\infty[\to D$ définie par $g(y) = \frac{y+\sqrt{y^2-4y}}{2}$.