Médian MT90 - P2020

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 14 points)

1. Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 0$ par $u_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

   (a) Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   Correction : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{P}(n)$:=« $u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».

   • Initialisation à $n = 0$: on a $u_n = 0^3 = 0$ et $\frac{0^2*(0+1)^2}{4} = 0$. La proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   • Hérédité : Soit $n \geq 0$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a

$$u_{n+1} = u_n + (n+1)^3 \underset{(\text{par } H.R.)}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{4} + n + 1\right]$$
$$= (n+1)^2 \frac{n^2+4n+4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

   La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est démontrée.

   • Conclusion : $\forall\, n \geq 0,\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

   (b) On admet que pour tout $n \geq 0$, on a $n < 2^n$.
   En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a $\sqrt{u_n} \in \mathbb{N}$ et $\sqrt{u_n} < 4^n$.

   Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\sqrt{u_n} = \frac{n(n+1)}{2}$.

   • Le numérateur est un produit de deux termes consécutifs, donc il est pair (divisible par 2). Par conséquent $\sqrt{u_n} \in \mathbb{N}$.

   • Ensuite on utilise le résultat admis : $n < 2^n \quad \Rightarrow \quad n+1 < 2^{n+1}$. On en déduit que $\sqrt{u_n} < \frac{2^n \times 2^{n+1}}{2} = 2^n \times 2^n = 4^n$.

2. Soit (v_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{(-1)^n + \sqrt{u_n}}{5^n}$.

   (a) Calculer v_0, v_1 et v_2.

   Correction : $v_0 = \frac{(-1)^0+\sqrt{0}}{5^0} = 1$, $v_1 = \frac{(-1)^1+\sqrt{1}}{5^1} = 0$ et $v_2 = \frac{(-1)^2+\sqrt{9}}{5^2} = \frac{4}{25}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

   Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$.

   • On a $\sqrt{u_n} \in \mathbb{N}$ et $\sqrt{u_n} < 4^n \quad \Rightarrow \sqrt{u_n} + 1 \leq 4^n$.
   Ensuite, il vient

$$(-1)^n + \sqrt{u_n} \leq 1 + \sqrt{u_n} \leq 4^n \quad \Rightarrow \quad v_n \leq \frac{4^n}{5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

- On a calculé $u_0 = 1$ et

$$n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{u_n} \geq 1 \text{ et } (-1)^n \geq -1 \quad \Rightarrow \quad (-1)^n + \sqrt{u_n} \geq 0\,.$$

On en déduit que tous les termes de la suite (v_n) sont positifs ou nuls.

(c) En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite ℓ à préciser.
(On ne demande pas d'utiliser la définition avec quantificateurs dans cette question).
Correction : La suite de terme général $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $0 < q = \frac{4}{5} < 1$. Cette suite géométrique converge alors vers 0. D'après l'encadrement établit à la question **2. b)** et le théorème des gendarmes, on conclut que la suite (v_n) converge aussi vers $\ell = 0$.

(d) Montrer que la suite extraite (v_{2n}) est strictement décroissante.
Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$, On étudie le signe de la différence entre deux termes consécutifs $v_{2(n+1)} - v_{2n}$. On a

$$\sqrt{u_{2n}} = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1) \text{ et } \sqrt{u_{2n+2}} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{2} = (n+1)(2n+3).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} v_{2n+2} - v_{2n} &= \frac{1+(n+1)(2n+3)}{5^{n+2}} - \frac{1+n(2n+1)}{5^n} \\ &= \frac{2n^2+5n+4-25(2n^2+n+1)}{5^{n+2}} \\ &= -\frac{48n^2+20n+21}{5^{n+2}} < 0. \end{aligned}$$

(e) On définit $A = \{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{v_{2n},\ n \in \mathbb{N}\}$.

i. Montrer que A admet un plus petit élément et un plus grand élément, à préciser.
Correction : D'après l'encadrement établit à la question **2. b)**, on sait que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq 1.$$

Or, $u_0 = 1 \in A$ et $u_1 = 0 \in A$ donc u_1 est le plus petit élément de A et u_0 est le plus grand élément de A.

ii. Montrer que B admet une borne inférieure.
Correction : On a l'inclusion $B \subset A \subset \mathbb{R}$ donc B est aussi borné par 0 et 1. De plus $u_0 = 1 \in B \Rightarrow B \neq \varnothing$. D'après l'axiome de la borne inférieure, toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

iii. Écrire la caractérisation de la borne inférieure de B à l'aide des quantificateurs. (**hors barème**)
Correction :

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in B, x \geq \inf B, \\ &\forall\, t > \inf B, \exists\, x \in B,\ x < t. \end{aligned}$$

iv. Utiliser cette caractérisation pour démontrer que $\inf B = \ell$.

Correction : Montrons que $\inf B = 0$. On sait déjà que $\ell = 0$ est un minorant de l'ensemble B. Il reste à démontrer que 0 est le plus grand des minorants. Autrement dit,

$$\forall\, t > 0,\ \exists\, x \in B,\ t > x\ .$$

preuve : Soit $t > 0$. Comme (v_{2n}) est une suite extraite de (v_n), on sait que (v_{2n}) tend vers $\ell = 0$ également et on utilise la définition avec quantificateurs pour $\varepsilon = t$:

$$\exists\, N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ (n > N \Rightarrow |v_{2n} - 0| < \varepsilon = t).$$

En particulier, pour $n = N + 1 > N$, on a $-t < u_{2N+2} < t$. On a bien trouvé un élément $x = u_{2N+2} \in B$ vérifiant $t > x$. La caractérisation de la borne inf est vérifiée.

On conclut que $\inf B = 0 = \ell$.

v. Peut-on dire que ℓ est le plus petit élément de B ?

Correction : Il faut vérifier si $\ell \in B$. Autrement dit on résout l'équation $v_{2n} = 0$ d'inconnue n.

$$v_{2n} = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + n(2n+1)}{5^n} = 0 \Leftrightarrow 1 + n(2n+1) = 0 \Leftrightarrow n(2n+1) = -1$$

La dernière égalité est impossible sous l'hypothèse $n \geq 0$.

On conclut que $\ell = 0 \notin B$. L'ensemble B n'admet pas de plus petit élément.

3. On définit les suites (s_n) et (t_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{u_k}} \qquad \text{et} \qquad t_n = s_n + \frac{2}{n},$$

où on rappelle que $u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(a) Montrer que les suites (s_n) et (t_n) sont adjacentes.

Correction : • On a $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} \geq 0$ donc la suite s_n est croissante.

• On a $t_{n+1} - t_n = s_{n+1} + \frac{2}{n+1} - s_n - \frac{2}{n} = \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} + \frac{-2}{n(n+1)}$.

Or $\sqrt{u_n} = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sqrt{u_{n+1}} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow t_{n+1} - t_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{2}{n(n+1)} < 0$.

La suite (t_n) est décroissante.

• Enfin, $t_n - s_n = \frac{2}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

On en déduit que les suites (s_n) et (t_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite.

(b) Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $\frac{1}{\sqrt{u_k}} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}$.

Correction : On a déjà calculé $\frac{1}{\sqrt{u_k}} = \frac{2}{k(k+1)}$. On vérifie

$$\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} = \frac{2(k+1) - 2k}{k(k+1)} = \frac{2}{k(k+1)}.$$

(c) En déduire que (s_n) et (t_n) convergent vers 2.

Correction : Grâce à la question **3. b)** on peut simplifier l'expression du terme général s_n

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n}(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}) \\
&= \left(\frac{2}{1} - \cancel{\frac{2}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{2}{2}} - \frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{n-1} - \cancel{\frac{2}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{2}{n}} - \frac{2}{n+1}\right) \\
&= 2 - \frac{2}{n+1}
\end{aligned}$$

On en déduit que la suite (s_n) converge vers 2. Comme (s_n) et (t_n) convergent vers la même limite, on en déduit que (t_n) converge vers 2 également.

Exercice 2 (Barème approximatif : 8 points)
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Soient P et Q deux propositions. Les propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?

   (a) $(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \text{ ou } \text{ non } Q)$.

   Correction : On utise $(R_1 \Rightarrow R_2) \Leftrightarrow (\text{non } R_1 \text{ ou } R_2)$ et on écrit

$$\begin{aligned}
\Big[(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \text{ ou non } Q)\Big] &\Leftrightarrow \Big[(\text{non } P \text{ ou non } Q) \text{ ou } (P \text{ ou non } Q)\Big] \\
&\Leftrightarrow \Big[(\text{non } P \text{ ou non } Q) \text{ ou } P\Big] \Leftrightarrow \Big[\underbrace{(\text{non } P \text{ ou } P)}_{\text{tautologie}} \text{ ou non } Q)\Big]
\end{aligned}$$

   Cette proposition est donc toujours vraie.

   (b) $(P \text{ ou } \text{ non } Q) \Rightarrow (P \text{ et } Q)$.

   Correction : On écrit

$$\begin{aligned}
\Big[(P \text{ ou non } Q) \Rightarrow (P \text{ et } Q)\Big] &\Leftrightarrow \Big[(\text{non } P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } Q)\Big] \\
&\Leftrightarrow \Big[\text{non } P \text{ ou } (P \text{ et } Q)\Big] \text{ et } \Big[Q \text{ ou } (P \text{ et } Q)\Big] \\
&\Leftrightarrow \Big[\text{non } P \text{ ou } P\Big] \text{ et } \Big[\text{non } P \text{ ou } Q\Big] \text{ et } \Big[Q \text{ ou } P\Big] \text{ et } \Big[Q \text{ ou } Q\Big] \\
&\Leftrightarrow \Big[\text{non } P \text{ ou } Q\Big] \text{ et } \Big[Q \text{ ou } P\Big] \text{ et } Q
\end{aligned}$$

   Cette dernière phrase est fausse si Q est fausse. La proposition n'est donc pas toujours vraie.

2. Soient f et g deux fonctions définies par

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1-3x^2}{x^2-2}\ .$$

(a) Déterminer les domaines de définition des fonctions f et g. On les notera respectivements D_f et D_g.

Correction : On a $D_f =]-\infty, -3[\cup [-\frac{1}{2}, +\infty[$ et $D_g = \mathbb{R} \backslash \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

(b) i. Ecrire la négation de la proposition "g est injective sur D_g".

Correction : $\exists\,(x, x') \in D_g \times D_g,\ x \neq x'$ et $g(x) = g(x')$.

ii. Montrer que g n'est pas injective.

Correction : Prenons $x = 1$ et $x' = -1$. On a bien $x \neq x'$ et $f(x) = f(x') = 2$. La fonction g n'est donc pas injective.

(c) On admet que $\operatorname{Im} f \subset D_g$ et $\operatorname{Im} g \subset D_f$. Déterminer les expressions algébriques de $g \circ f$ et $f \circ g$.

Correction : Soit $x \in D_f$, alors

$$g \circ f(x) = \frac{1 - 3\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}\right)^2 - 2} = \frac{1 - 3\frac{2x+1}{x+3}}{\frac{2x+1}{x+3} - 2} = \frac{\frac{(x+3)-3(2x+1)}{x+3}}{\frac{2x+1-2(x+3)}{x+3}} = \frac{-5x}{-5} = x.$$

Soit $x \in D_g$, alors

$$f \circ g(x) = \sqrt{\frac{\frac{2(1-3x^2)}{x^2-2} + 1}{\frac{1-3x^2}{x^2-2} + 3}} = \sqrt{\frac{\frac{(2-6x^2)+(x^2-2)}{x^2-2}}{\frac{(1-3x^2)+3(x^2-2)}{x^2-2}}} = \sqrt{\frac{-5x^2}{-5}} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

(d) On définit la fonction h sur $D_h = D_g \cap [0, +\infty[$ et à valeurs dans $\operatorname{Im} h$ par $h(x) = g(x)$.

i. Que peut-on en déduire sur les fonctions f et h ?

Correction : Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$. D'après la question **2. (c)**, on a

$$f \circ h = id_{D_h} \text{ et } h \circ f = id_{D_f}$$

Les fonctions $f : D_f \to \operatorname{Im} f$ et $h : D_h \to \operatorname{Im} h$ sont réciproques l'une de l'autre. Elles sont toutes deux bijectives.

ii. Préciser $\operatorname{Im} h$.

Correction : Comme $h = f^{-1}$, on a $\operatorname{Im} h = D_f =]-\infty, -3] \cup [-\frac{1}{2}, +\infty[$.

3. Soit E un ensemble et soient A, B et C trois sous-ensembles de E.
Montrer que

$$A \cap C = B \quad \Rightarrow \quad (A \backslash C) \cup B = A.$$

Correction :
<u>hyp</u> : $A \cap C = B$
<u>but</u> : $(A \backslash C) \cup B = A$
<u>dém</u> : Il suffit d'écrire $E = C \cup \complement_E C$. Par conséquent

$$A = A \cap E = A \cap \left(C \cup \complement_E C\right) = (A \cap C) \cup (A \cap \complement_E C) = B \cup (A \backslash C)\,.$$