Médian MT90 - P2021

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points) **CHANGER DE COPIE**
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Soient P, Q et R trois propositions. Parmi les implications suivantes, laquelle (ou lesquelles) sont toujours vraies ?

   (a) $\Big(\big(P \text{ et non} \, Q\big) \text{ ou } R\Big) \ \Rightarrow \ \big(P \Rightarrow R\big)$.

   (b) $\Big(\big(P \text{ et non} \, Q\big) \text{ ou } R\Big) \ \Rightarrow \ \big(Q \Rightarrow R\big)$.

   (c) $\Big(\big(P \text{ et non} \, Q\big) \text{ ou } R\Big) \ \Rightarrow \ \big(\text{non} \, R \Rightarrow P\big)$.

   (d) $\Big(\big(P \text{ et non} \, Q\big) \text{ ou } R\Big) \ \Rightarrow \ \big(\text{non} \, R \Rightarrow Q\big)$.

   Correction : On a

$$\begin{aligned}\Big(\big(P \text{ et non} \, Q\big) \text{ ou } R\Big) &\Leftrightarrow \Big(\big(P \text{ ou } R\big) \text{ et } \big(\text{non} \, Q \text{ ou } R\big)\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big(\big(\text{non} \, P \ \Rightarrow \ R\big) \text{ et } \big(Q \ \Rightarrow \ R\big)\Big)\end{aligned}$$

   La proposition (b) est donc toujours vraie. Par contraposée, la proposition (c) est aussi toujours vraie.

2. Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose $A := \{f \in E; \, \forall \, x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geq 0\}$ et $B := \{f \in E; \, \forall \, x \in \mathbb{R}, \ f \circ f(x) \geq 0\}$.

   (a) Justifier que $A \neq \varnothing$.
   Correction : La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ appartient à l'ensemble A. En effet, $\forall \, x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geq 0$.

   (b) Montrer que $A \subset B$.
   Correction : Il faut démontrer l'implication $f \in A \ \Rightarrow \ f \in B$.
   démonstration : Soit $f \in A$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $y = f(x) \in \mathbb{R}$ et $f(y) \geq 0$. Par substitution, $f(f(x)) = f \circ f(x) \geq 0$.
   On vient de montrer que $\forall \, x \in \mathbb{R}, \ f \circ f(x) \geq 0$ donc $f \in B$.

(c) Soit g, la fonction définie par $g(x) = \cos(\frac{\pi}{3}x)$. Montrer que $g \in B \backslash A$.

Correction : • On calcule $\mathrm{Im}\, g \circ g$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} [-1, 1] \xrightarrow{g} \cos([-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]) = [\frac{1}{2}, 1].$$

Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}, g \circ g(x) \geq \frac{1}{2} \geq 0$ donc $g \circ g \in B$.

• $\exists x = 2 \in \mathbb{R},\ g(x) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} < 0$. Il s'agit de la négation du critère d'appartenance à A donc $g \notin A$.

• On vient de montrer que $g \in B$ et $g \notin A$, autrement dit $g \in B \backslash A$.

(d) Montrer que

$$f \in B \quad \text{et} \quad f \text{ est surjective} \quad \Rightarrow \quad f \in A.$$

Correction : Soit $f \in B$ surjective. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme f est surjective, on sait qu'$\exists\, x' \in \mathbb{R},\ x = f(x')$. Par conséquent

$$f(x) = f(f(x')) = f \circ f(x') \geq 0.$$

On vient de montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ donc $f \in A$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les propositions

$$P(n) := « \, 4^n - 1 \text{ est un multiple de } 3 \, » \quad \text{et} \quad Q(n) := « \, 4^n + 1 \text{ est un multiple de } 3 \, ».$$

(a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ et $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$.

• On suppose $P(n)$ vraie. Alors,

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = (4^n - 1) + 3 \times 4^n$$

Par hypothèse de récurrence, $\exists k \in \mathbb{N},\ 4^n - 1 = 3k$. Donc $4^{n+1} - 1 = 3(k + 4^n)$ avec $k + 4^n \in \mathbb{N}$. Par conséquent $P(n+1)$ est vraie.

• On suppose $Q(n)$ vraie. Alors,

$$4^{n+1} + 1 = 4 \times 4^n + 1 = (4^n + 1) + 3 \times 4^n$$

Par hypothèse de récurrence, $\exists k' \in \mathbb{N},\ 4^n + 1 = 3k'$. Donc $4^{n+1} + 1 = 3(k' + 4^n)$ avec $k + 4^n \in \mathbb{N}$. Par conséquent $Q(n+1)$ est vraie.

(b) Peut-on conclure que $\forall\, n \in \mathbb{N}, 4^n - 1$ est un multiple de 3 ?

Correction : Il reste à vérifier l'initialisation à $n = 0$:

$$4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \times 0$$

$P(0)$ est vraie donc oui, $\forall\, n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

(c) Peut-on conclure que $\forall\, n \in \mathbb{N}, 4^n + 1$ est un multiple de 3 ?

Correction : Ici, pour $n = 0$, $4^0 + 1 = 2$ n'est pas un multiple de 3. Donc la propriété n'est pas vraie pour $n = 0$. En fait, elle n'est vraie pour aucun entier $n \in \mathbb{N}$. Cela se démontre par l'absurde. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $Q(n_0)$ est vrai. Comme $P(n_0)$ est vraie alors

$$\left(\exists\, k \in \mathbb{N},\ 4^{n_0} - 1 = 3k\right) \text{ et } \left(\exists\, k' \in \mathbb{N},\ 4^{n_0} + 1 = 3k'\right) \Rightarrow 2 = (4^{n_0} + 1) - (4^{n_0} - 1) = 3k - 3k' = 3(k - k').$$

Donc 2 serait un multiple de 3, ce qui est absurde.

Exercice 2 (Barème approximatif : 10 points) **CHANGER DE COPIE**
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit (w_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, par $w_n = \frac{2n+1}{1-3n}$.
   (a) Calculer w_1, w_2 et w_3.
   Correction : On a
   $$w_1 = -\frac{3}{2}\,, \quad w_2 = -1\,, \quad w_3 = -\frac{7}{8}\,.$$
   (b) Étudier la monotonie de la suite (w_n).
   Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{-2-3n} - \frac{2n+1}{1-3n} &= \frac{(2n+3)(1-3n)-(2n+1)(-2-3n)}{(-2-3n)(1-3n)} \\ &= \frac{2n+3-\cancel{6n^2}-9n-[-4n-2-\cancel{6n^2}-3n]}{(-2-3n)(1-3n)} \\ &= \frac{5}{(-2-3n)(1-3n)} > 0. \end{aligned}$$
   La suite est strictement monotone.
   (c) Montrer, à l'aide de la définition avec quantificateurs, que (w_n) converge vers une limite ℓ à préciser.
   Correction : Montrons que la suite converge vers $\ell = \frac{-2}{3}$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on simplifie la valeur absolue $|w_n - \ell$:
   $$\left|\tfrac{2n+1}{1-3n} - (-\tfrac{2}{3})\right| = \left|\frac{3(2n+1)+2(1-3n)}{3(1-3n)}\right| = \left|\frac{5}{3(1-3n)}\right| = \frac{5}{3(3n-1)}.$$
   On résout l'inéquation $|w_n - \ell| < \varepsilon$:
   $$\left|\tfrac{2n+1}{1-3n} - (-\tfrac{2}{3})\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{5}{3(3n-1)} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 3n-1 > \tfrac{5}{3\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n > \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{5}{3\varepsilon}+1\right).$$
   On pose $\boxed{N = E\left(\frac{1}{3}(\frac{5}{3\varepsilon}+1)\right)+1 \in \mathbb{N}^*}$. On a
   $$n > N \Rightarrow n > \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{5}{3\varepsilon}+1\right) \quad \Rightarrow \left|\tfrac{2n+1}{1-3n} - (-\tfrac{2}{3})\right| < \varepsilon.$$
   La définition de « (w_n) converge vers $-\frac{2}{3}$ » est démontrée.
   (d) On définit $A = \{w_n, n \in \mathbb{N}\}$.
      i. Montrer que A admet un plus petit élément à préciser.
      Correction : La suite (w_n) est croissante donc on peut écrire
      $$\exists m = w_1 \in A,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ m \leq u_n \quad \Leftrightarrow \exists m = -\tfrac{3}{2},\ \forall x \in A,\ m \leq x.$$
      L'ensemble A admet un plus petit élément qui est $-\frac{3}{2}$.
      ii. Justifier que A admet une borne supérieure.

Correction : L'ensemble A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Comme (w_n) est croissante et converge vers $\ell = -\frac{3}{2}$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ x \leq \ell$$

L'ensemble A est majoré par ℓ. D'après l'axiome de la borne supérieure, $\sup A$ existe.

iii. Rappeler la caractérisation de la borne supérieure de B à l'aide des quantificateurs.

Correction :

$$\begin{aligned} &\forall x \in A, x \leq \sup A, \\ &\forall t < \sup B, \exists x \in A,\ t < x. \end{aligned}$$

iv. Utiliser cette caractérisation pour démontrer que $\sup A = \ell$.

Correction : Montrons que $\sup A = \ell = -\frac{3}{2}$. On sait déjà que ℓ est un majorant de l'ensemble A. Il reste à démontrer que ℓ est le plus petit des majorants.
preuve : Soit $t < -\frac{3}{2}$. On peut utiliser la définition avec quantificateurs pour $\varepsilon = \ell - t > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ (n > N \Rightarrow |w_n - \ell| < \varepsilon = \ell - t \Rightarrow t - \ell < w_n - \ell \leq 0).$$

En particulier, pour $n = N + 1 > N$, on a $t < w_{N+1}$. On a bien trouvé un élément $x = w_{N+1} \in A$ vérifiant $t < x$. La caractérisation de la borne sup est vérifiée.
On conclut que $\sup A = \ell$.

v. Peut-on dire que ℓ est le plus grand élément de A ?

Correction : Non car $\ell \notin A$. En effet l'équation

$$\tfrac{2n+1}{1-3n} = -\frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3(2n+1) = -2(1-3n) \quad \Leftrightarrow \quad 3 = -2$$

n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^*$.

2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite monotone convergeant vers 0 et $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par

$$\begin{cases} v_0 \neq 0 \\ v_{n+1} = -v_n \end{cases}.$$

On définit les suites (S_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n v_n.$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Correction : Il sera utile de remarquer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{2n} = v_0$ et $v_{2n+1} = -v_0$.
On commence par étudier la monotonie.
• Pour (S_{2n}) :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2}v_{2n+2} + u_{2n+1}v_{2n+1} = v_0(u_{2n+2} - u_{2n+1})$$

Pour (S_{2n+1}) :

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3}v_{2n+3} + u_{2n+2}v_{2n+2} = -v_0(u_{2n+3} - u_{2n+2})$$

• Si (u_n) est monotone alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $(u_{m+1} - u_m)$ de signe constant. Notamment, en prenant $m = 2n+1$ puis $m = 2n+2$, les termes $(u_{2n+2} - u_{2n+1})$ et $(u_{2n+3} - u_{2n+2})$ sont de mêmes signes. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc monotones et de monotonie contraire.
• On étudie la différence :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}v_{2n+1} = -v_0 u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, la suite (u_{2n+1}) est une suite extraite de (u_n) donc elle converge vers 0 également.