Final MT91/MA91 - P2021
Conditions particulières
liées au COVID

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants sur un total de 16 points.

Exercice 1 (Barème approximatif : 7)

1. À l'aide d'un changement de variable, déterminer la fonction G définie par
$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{1+3u^2}\,du.$$
On précise que $G(1) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

2. On considère la fraction rationnelle définie pour $x \in]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2+x}{x^3(1+3x^2)}$.
   (a) Effectuer la division selon les puissances croissantes de $P(x) = 2+x$ par $Q(x) = 1+3x^2$ avec un reste de valuation 3.
   (b) En déduire qu'une primitive arbitraire de la fonction f est
$$F(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 3\ln\left(\frac{1+3x^2}{x^2}\right) - 3G(x).$$

3. Soit $I =]1\,,+\infty[$. On considère l'équation différentielle suivante
$$(E_1) \qquad (x-1)y'(x) - 3y(x) = \frac{x^2-1}{3x^2-6x+4}\,, \quad x \in I\,.$$
   (a) Donner la forme générale des solutions y_h de l'équation homogène associée à (E_1). *(Penser à simplifier l'expression de y_h).*
   (b) En utilisant la méthode de la variation de la constante, montrer qu'une solution particulière y_p de (E_1) est
$$y_p(x) = (x-1)^3 F(x-1).$$
   (c) En déduire l'unique solution de l'équation (E_1) vérifiant la condition $y(2) = 0$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 9)

1. Résoudre algébriquement dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$.
2. Soit $P = X^3 - 2X^2 + \alpha X + \beta$, où α et β sont deux nombres réels.
   (a) Déterminer les valeurs de α et β de sorte que -1 soit une racine de P de multiplicité 2.
   (b) Déterminer le polynôme Q tel que $P(X^2) = (X^2 + 1)Q$.
   (On précise que le polynôme $P(X^2)$ est $X^6 - 2X^4 + \alpha X^2 + \beta$).
   (c) Donner la décomposition du polynôme $P(X^2)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
   (d) En déduire la décomposition du polynôme $P(X^2)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
3. On considère la fraction rationelle $F = \dfrac{X^2}{X^4 - 3X^2 - 4}$.
   (a) Donner la forme de la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.
   (b) Déterminer les coefficients des éléments simples.