Final MT91/MA91 - P2021
Conditions particulières
liées au COVID

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants sur un total de 16 points.

Exercice 1 (Barème approximatif : 7)

1. À l'aide d'un changement de variable, déterminer la fonction G définie par

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{1+3u^2}\,du.$$

Correction : On pose $t = \sqrt{3}\,u$. On change les bornes :

$$u = 0 \Leftrightarrow t = 0 \qquad \text{et} \qquad u = x \Leftrightarrow t = \sqrt{3}\,x.$$

Ensuite on calcule $\frac{du}{dt} = \dfrac{d\,[\frac{1}{\sqrt{3}}\,t]}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. On obtient

$$G(x) = \int_0^{\sqrt{3}x} \frac{1}{1+t^2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} dt = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} t\right]_0^{\sqrt{3}x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{3}x).$$

On précise que $G(1) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

2. On considère la fraction rationnelle définie pour $x \in \,]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2+x}{x^3(1+3x^2)}$.

(a) Effectuer la division selon les puissances croissantes de $P(x) = 2+x$ par $Q(x) = 1+3x^2$ avec un reste de valuation 3.

Correction :

$$\begin{array}{cccccccccc|c}
2 & + & x & & & & & & & & 1+3x^2 \\
\hline
-2 & & & - & 6x^2 & & & & & & \\
 & & x & - & 6x^2 & & & & & & 2+x-6x^2 \\
\hline
 & - & x & & & - & 3x^3 & & & & \\
 & & & - & 6x^2 & - & 3x^3 & & & & \\
\hline
 & & & + & 6x^2 & & & + & 18x^4 & & \\
 & & & & & - & 3x^3 & + & 18x^4 & &
\end{array}$$

On obtient $2 + x = (1+3x^2)(2+x-6x^2) + (-3x^3 + 18x^4)$.

(b) En déduire qu'une primitive arbitraire de la fonction f est

$$F(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 3\ln\left(\frac{1+3x^2}{x^2}\right) - 3G(x).$$

Correction : D'après la question précédente, on peut réécrire la fraction $f(x)$ de la façon suivante :

$$f(x) = \frac{2+x-6x^2}{x^3} + \frac{-3+18x}{1+3x^2} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} - 3\times\frac{1}{1+3x^2} + 3\times\frac{6x}{1+3x^2}.$$

Une primitive de f est donc définie par

$$\begin{aligned} F(x) = \int f(x)\,dx &= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6\ln x - 3G(x) + 3\ln(1+3x^2) \\ &= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 3\ln\left(\frac{1+3x^2}{x^2}\right) - 3G(x) \end{aligned}$$

3. Soit $I =]1\,,+\infty[$. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_1) \qquad (x-1)y'(x) - 3y(x) = \frac{x^2-1}{3x^2-6x+4}\,, \quad x \in I\,.$$

(a) Donner la forme générale des solutions y_h de l'équation homogène associée à (E_1). *(Penser à simplifier l'expression de y_h).*

Correction : L'équation homogène associée à (E_1) est $y'(x) = \frac{3}{x-1}y(x)$. La fonction $a(x) = \frac{3}{x-1}$ est continue sur I et admet une primitive $A(x) = 3\ln(x-1)$. La forme générale des solutions de l'équation homogène est donc

$$y_h(x) = Ce^{3\ln(x-1)} = Ce^{\ln(x-1)^3} = C(x-1)^3, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(b) En utilisant la méthode de la variation de la constante, montrer qu'une solution particulière y_p de (E_1) est

$$y_p(x) = (x-1)^3 F(x-1).$$

Correction : En s'inspirant de l'expression de y_h, on cherche une solution particulière y_p sous la forme $y_p(x) = \varphi(x)(x-1)^3$ où φ est une fonction à déterminer. On calcule la dérivée première

$$y_p'(x) = \varphi'(x)(x-1)^3 + 3\varphi(x)(x-1)^2.$$

On remplace le tout dans l'équation (E_1) pour obtenir

$$\varphi'(x)(x-1)^4 + \cancel{3\varphi(x)(x-1)^3} - \cancel{3\varphi(x)(x-1)^3} = \frac{x^2-1}{3x^2-6x+4}$$

On obtient

$$\varphi'(x) = \frac{x^2-1}{(x-1)^4(3x^2-6x+4)} = \frac{x+1}{(x-1)^3(3x^2-6x+4)}$$

Il reste à vérifier que $\varphi(x) = F(x-1)$. On a

$$[F(x-1)]' = f(x-1) = \frac{2+(x-1)}{(x-1)^3(1+3(x-1)^2)} = \frac{1+x}{(x-1)^3(1+3x^2-6x+3)} = \varphi'(x)$$

On peut donc choisir $\varphi(x) = F(x-1)$.

(c) En déduire l'unique solution de l'équation (E_1) vérifiant la condition $y(2) = 0$.

Correction : La forme générale des solutions de (E_1) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (x-1)^3(F(x-1) + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

La condition $y(2) = 0$ entraîne $C = -F(1) = 2 - 3\ln(4) + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. L'unique solution recherchée est donc

$$y(x) = (x-1)^3\left(F(x-1) + 2 - 3\ln(4) + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

Exercice 2 (Barème approximatif : 9)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$.

Correction : on effectue le changement de variable $x = z^2$ pour résoudre le système

$$z^4 - 3z^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z^2 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z^2 \\ x = 4 \text{ ou } x = -1 \end{cases}.$$

On résout ensuite les équations $z^2 = 4$ et $z^2 = -1$. Les quatres solutions sont

$$z_0 = -2,\ z_1 = 2\ ,z_2 = -i \text{ et } z_3 = i.$$

2. Soit $P = X^3 - 2X^2 + \alpha X + \beta$, où α et β sont deux nombres réels.

(a) Déterminer les valeurs de α et β de sorte que -1 soit une racine de P de multiplicité 2.

Correction : On cherche α et β de sorte que $p(-1) = p'(-1) = 0$ et on vérifie que $p''(-1) \neq 0$.

$$p(-1) = -1 - 2 - \alpha + \beta = 0$$

$$p'(x) = 3x^2 - 4x + \alpha \quad \Leftrightarrow \quad p'(-1) = 3 + 4 + \alpha = 0.$$

On en déduit que $\boxed{\alpha = -7}$ et $\boxed{\beta = 3 + \alpha = -4}$.

(b) Déterminer le polynôme Q tel que $P(X^2) = (X^2+1)Q$.

(On précise que le polynôme $P(X^2)$ est $X^6 - 2X^4 + \alpha X^2 + \beta$).

Correction : Il faut effectuer la division euclidienne de $X^6 - 2X^4 - 7X^2 - 4$ par $X^2 + 1$.

$$\begin{array}{ccccccc|c}
X^6 & - & 2X^4 & - & 7X^2 & - & 4 & X^2+1 \\ \hline
-X^6 & - & X^4 & & & & & X^4-3X^2-4 \\
 & - & 3X^4 & - & 7X^2 & - & 4 & \\ \hline
 & + & 3X^4 & + & 3X^2 & & & \\
 & & & - & 4X^2 & - & 4 & \\ \hline
 & & & + & 4X^2 & + & 4 & \\
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

On obtient $P(X^2) = (X^2+1)(X^4 - 3X^2 - 4)$.

(c) Donner la décomposition du polynôme $P(X^2)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Correction : D'après les questions précédentes nous avons

$$\begin{aligned} P(X^2) &= (X^2+1)(X^4-3X^2-4) = (X-i)(X+i)(X-2)(X+2)(X-i)(X+i) \\ &= (X-2)(X+2)(X-i)^2(X+i)^2. \end{aligned}$$

(d) En déduire la décomposition du polynôme $P(X^2)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction : La factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est alors

$$P(X^2) = (X-2)(X+2)(X^2+1)^2.$$

3. On considère la fraction rationelle $F = \dfrac{X^2}{X^4-3X^2-4}$.

(a) Donner la forme de la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

Correction : On utilise la factorisation du dénominateur dans $\mathbb{R}[X]$ pour en déduire l'écriture

$$F = \frac{X^2}{(X-2)(X+2)(X^2+1)} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X+2} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

(b) Déterminer les coefficients des éléments simples.

Correction : On a

$$a = \Big[(X-2)F\Big]_{x=2} = \Big[\frac{X^2}{(X+2)(X^2+1)}\Big]_{x=2} = \frac{4}{4\times 5} = \frac{1}{5},$$

$$b = \Big[(X+2)F\Big]_{x=-2} = \Big[\frac{X^2}{(X-2)(X^2+1)}\Big]_{x=-2} = \frac{4}{-4\times 5} = -\frac{1}{5}.$$

$$ci+d = \Big[(X^2+1)F\Big]_{x=i} = \Big[\frac{X^2}{(X-2)(X+2)}\Big]_{x=i} = \frac{-1}{(i-2)\times(i+2)} = -\frac{1}{-1+2i-2i-4} = \frac{1}{5}.$$

D'où $c = 0$ et $d = \frac{1}{5}$. On conclut que

$$F = \frac{1}{5(X-2)} - \frac{1}{5(X+2)} - \frac{1}{5(X^2+1)}.$$