Médian MT91 - A2014 - Corrigé

Exercice 1

1. (a) Montrer que $g(u) = \sqrt{1+u}$ admet un développement de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de 0 et le calculer.

   Correction : La fonction g est deux fois continûment dérivable au voisinage de 0, elle admet donc un développement de Taylor-Young. On calcule les dérivées de g : $g(u) = (1+u)^{1/2}$, $g'(u) = \frac{1}{2}(1+u)^{-1/2}$, $g''(u) = \frac{-1}{4}(1+u)^{-3/2}$, d'où le développement

   $$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + u^2\varepsilon(u).$$

   où ε est une fonction telle que $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$.

   (b) En déduire le développement limité de $\sqrt{4+y+y^2}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

   Correction :

   $$\begin{aligned}
   \sqrt{4+y+y^2} &= 2\sqrt{1+\frac{y}{4}+\frac{y^2}{4}} \\
   &= 2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{4}+\frac{y^2}{4}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{y}{4}+\frac{y^2}{4}\right)^2\right)+y^2\varepsilon(y) \\
   &= 2+\frac{y}{4}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{64}\right)y^2+y^2\varepsilon(y) \\
   &= 2+\frac{y}{4}+\frac{15}{64}y^2+y^2\varepsilon(y)
   \end{aligned}$$

   (c) Soit la fonction $f(x) = \sqrt{4x^2+x+1}$.

   i. Ecrire le développement limité de $\dfrac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

   Correction : On écrit $\dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{\dfrac{4x^2+x+1}{x^2}} = \sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$.
   On pose $y = \frac{1}{x}$. Dans ce cas $\dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{4+y+y^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$. D'après la question précédente on a $\dfrac{f(x)}{x} = 2+\dfrac{1}{4x}+\dfrac{15}{64x^2}+\dfrac{1}{x^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   ii. Etudier la branche infinie de f lorsque x tend vers $+\infty$.
   On précisera l'équation de l'asymptote et la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Correction : On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2+x+1=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ donc par composition de limites on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

D'après la question précédente $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2\neq 0$ donc la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et au voisinage de $+\infty$ on a

$$f(x)=2x+\frac{1}{4}+\frac{15}{64x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\ .$$

L'équation de l'asymptote est donc $y=2x+\dfrac{1}{4}$.

Pour obtenir la position de cette asymptote par rapport à la courbe représentative de f on étudie le signe de $\dfrac{15}{64x}$ au voisinage de $+\infty$. Ici, la courbe est au-dessus de l'asymptote.

2. (a) Soit la fonction $f_1(x)=\tan x$, écrire le développement de Taylor-Young de f_1 à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.

Correction : La fonction f_1 est deux fois continûment dérivable au voisinage de 0, elle admet donc un développement de Taylor-Young. On calcule les dérivées de f_1 : $f_1'(x)=1+\tan^2 x$ et $f_1''(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)$, d'où le développement

$$f_1(\tfrac{\pi}{4}+h)=1+2h+2h^2+h^2\varepsilon(h)\ .$$

(b) A quelle condition sur x_0 la fonction $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ admet-elle un développement de Taylor-Young, à l'ordre 2, au voisinage de x_0 ? Déterminer alors ce développement.

Correction : La fonction φ admet un développement de Taylor-Young à l'ordre 2 en tout point $x_0\neq 0$ (elle sera alors deux fois continûment dérivable).

On calcule les dérivées de φ : $\varphi(x)=x^{-1}$, $\varphi'(x)=-x^{-2}, \varphi'(x)=2x^{-3}$, et on a

$$\varphi(x_0+h)=\frac{1}{x_0}-\frac{h}{x_0^2}+\frac{h^2}{x_0^3}+h^2\varepsilon(h)\ .$$

(c) Soit la fonction f_2 définie par

$$f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2}\cos x+1}.$$

Utiliser la question précédente pour obtenir le développement limité de f_2 à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.

Correction : On pose $\psi(x)=\sqrt{2}\cos x+1$. La fonction ψ est deux fois continûment dérivable donc elle admet un développement de Taylor-Young en $\frac{\pi}{4}$. On calcule ses dérivées ou on calcule le développement de $\cos x$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$:

$\cos(\frac{\pi}{4}+h)=\frac{\sqrt{2}}{2}-h\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{h^2}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}h^2\varepsilon(h)$. D'où

$$\psi(\tfrac{\pi}{4}+h)=2-h-\frac{h^2}{2}+h^2\varepsilon(h)\ .$$

Comme $\psi(\frac{\pi}{4})=2$, on prend $x_0=2$ pour le développement de φ et la fonction $f_2=\varphi\circ\psi$ admet le développement limité au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ suivant :

$$\begin{aligned} f_2(\tfrac{\pi}{4}+h) &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(-h-\frac{h^2}{2}\right)+\frac{1}{8}\left(-h-\frac{h^2}{2}\right)^2+h^2\varepsilon(h) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{h}{4}+\frac{h^2}{4}+h^2\varepsilon(h)\ . \end{aligned}$$

(d) Soit la fonction f définie par

$$f(x) = f_1(x) f_2(x),$$

calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.

Correction : On effectue le produit des parties régulières des développements de f_1 et de f_2, d'où

$$\begin{aligned} f(\tfrac{\pi}{4}+h) &= \left(1+2h+2h^2\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{h}{4}+\frac{h^2}{4}\right)+h^2\varepsilon(h) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{5h}{4}+\frac{7h^2}{4}+h^2\varepsilon(h)\ . \end{aligned}$$

(e) Retrouver le résultat de la question précédente en effectuant une division suivant les puissantes croissantes.

Correction : On effectue la division suivant les puissances croissantes de la partie régulière de f_1 par celle de ψ (puisque $f_2 = 1/\psi$) :

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & + & 2h & + & 2h^2 & 2-h-\dfrac{h^2}{2} \\ \hline & + & \dfrac{5h}{2} & + & \dfrac{5h^2}{4} & \dfrac{1}{2}+\dfrac{5h}{4}+\dfrac{7h^2}{4} \\ & & & + & \dfrac{14h^2}{4} & \end{array}$$

On obtient à nouveau $f(x) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{5h}{4}+\dfrac{7h^2}{4}+h^2\varepsilon(h)$.

Correction du Médian MT91 - A15

Exercice 1

1. (a) La fonction g est 3 fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ donc on peut appliquer Taylor-Young : $\left|\begin{array}{l}\text{Si } a>0,\ \forall h \text{ tq } a+h \in]0,+\infty[\\ \text{Si } a<0,\ \forall h \text{ tq } a+h \in]-\infty,0[,\end{array}\right.$ $\exists$ une fonction ε tq $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

et $g(a+h) = g(a) + h g'(a) + \frac{h^2}{2} g''(a) + \frac{h^3}{3!} g'''(a) + h^3 \varepsilon(h)$

$$g(a+h) = \frac{1}{a+h} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{h}{a}}$$

On sait que $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3 \varepsilon(u)$

d'où $g(a+h) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{h}{a} + \frac{h^2}{a^2} - \frac{h^3}{a^3}\right) + h^3 \varepsilon(h)$

(b) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)$

(c) $\varphi(x) = g(f(x))$ où $f(x) = 2 + x\cos x$

d.l. de f au voisinage de 0 à l'ordre 3 : $f(x) = \underline{\underline{2}} + \boxed{x - \frac{x^3}{2}} + x^3 \varepsilon(x)$

$\Rightarrow$ il faut un d.l. de g au voisinage de $a = 2$

$g(2+u) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{8}\right) + u^3 \varepsilon(u)$

d'où $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{2}\right)^3\right) + x^3 \varepsilon(x)$

$\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon(x)$

(d)

$$\begin{array}{l|l} 1 & 2 + x - \frac{x^3}{2} \\ \cline{2-2} -\frac{x}{2} \quad + \frac{x^3}{4} & \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \\ \quad \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} & \\ \qquad \frac{x^3}{8} & \end{array}$$

d'où $\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon(x)$.

(e) i. L'équation de la tangente est $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$.

ii. $\varphi(x) - t(x) = \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x) = x^2\left(\frac{1}{8} + \varepsilon(x)\right)$

Au voisinage de 0, $\varphi(x) - t(x) \geq 0$.

iii. La courbe est donc au-dessus de la tangente

2. (a) Par intégration, on obtient : $f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \underbrace{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=1} + d_0 h + d_1 \frac{h^2}{2} + d_2 \frac{h^3}{3} + d_3 \frac{h^4}{4} + h^4 \varepsilon(h)$

(b) $f^2\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \left(1 + d_0 h + d_1 \frac{h^2}{2} + d_2 \frac{h^3}{3}\right)^2 + h^3 \varepsilon(h)$

$= 1 + 2d_0 h + (d_0^2 + d_1) h^2 + \left(d_0 d_1 + \frac{2d_2}{3}\right) h^3 + h^3 \varepsilon(h)$

(c) i. $f'(x) = 1 + f^2(x)$ car $\tan' x = 1 + \tan^2 x$

ii. On identifie terme à terme les d.l. : $\begin{cases} d_0 = 2 \\ d_1 = 2d_0 = 4 \\ d_2 = d_0^2 + d_1 = 8 \\ d_3 = d_0 d_1 + \frac{2d_2}{3} = 8 + \frac{16}{3} = \frac{40}{3} \end{cases}$

iii. $f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = 1 + 2h + 2h^2 + \frac{8}{3}h^3 + \frac{40}{3}h^4 + h^4 \varepsilon(h)$

iv. $f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + h f'\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{h^2}{2} f''\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{h^3}{3!} f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) + h^4 \varepsilon(h)$

d'où $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = d_0 = 2$ et $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = d_1 = 4$

Médian MT91 - A2016 - Correction

Exercice 1

1. (a) Justifier l'utilisation de la formule de Taylor-Young, et l'écrire, pour obtenir un développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $g(x) = \ln(1+x)$.

Correction : La fonction g est 3 fois continument dérivable au voisinage de 0, donc on peut appliquer Taylor-Young :

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0 \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

(b) Montrer que le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $f_1(x) = \ln(1 + \ln(1+x))$ est

$$f_1(x) = x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Correction : $f_1(x) = g \circ g(x)$.
D'après le résultat de la question 1, en particulier l'absence de terme constant, on peut composer le d.l. de g au voisinage de 0 avec le d.l. de g au voisinage de 0, d'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon'(x) \\ f(x) &= x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + x^3\varepsilon'(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon'(x) = 0 \end{aligned}$$

(c) On considère à présent la fonction

$$f_2(x) = \frac{f_1(x)}{1+x}.$$

i. Calculer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $f_2(x)$ en utilisant la multiplication des développements limités.

Correction :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \left(x - x^2 + \frac{7}{6}x^3\right)(1 - x + x^2 - x^3) + x^3\varepsilon'(x) \\ &= x - x^2 + x^3 - x^2 + x^3 + \frac{7}{6}x^3 + x^3\varepsilon''(x) \\ &= x - 2x^2 + \frac{19}{6}x^3 + x^3\varepsilon''(x) \end{aligned}$$

ii. Retrouver ce résultat en faisant une division suivant les puissances croissantes.

Correction :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & x & - & x^2 & + & \frac{7}{6}x^3 & 1+x \\
- & x & - & x^2 & & & \\
\hline
 & & - & 2x^2 & + & \frac{7}{6}x^3 & x-2x^2+\frac{19}{6}x^3 \\
 & & + & 2x^2 & + & 2x^3 & \\
\hline
 & & & & & \frac{19}{6}x^3 &
\end{array}$$

2. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = e^x$.
Ecrire le développement limité, au voisinage de a, à l'ordre 3, de la fonction f.
Correction : $e^{(a+h)} = e^a \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!}\right) + h^3\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.
En effet, $f(a) = f'(a) = f''(a) = f'''(a) = e^a$.

(b) On définit le polynôme p par $p(x) = -1 + 6x - 2x^2$. Utiliser la formule de Taylor pour les polynômes pour écrire p sous la forme :

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-1) + \alpha_2(x-1)^2.$$

On préciserera les valeurs de α_0, α_1 et α_2
Correction : D'après la formule de Taylor pour les polynômes,

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{p''(1)}{2}(x-1)^2 \text{ donc } p(x) = 3 + 2(x-1) - 2(x-1)^2$$

car $p(1) = 3,\ p'(x) = 6 - 4x,\ p'(1) = 2,\ p''(x) = -4,\ p''(1) = -2.$

(c) On définit la fonction $\varphi(x) = e^{p(x)}$. Utiliser ce qui précède pour montrer que le développement limité, au voisinage de $x_0 = 1$, à l'ordre 3, de la fonction φ, est :

$$\varphi(x) = e^3\left(1 + 2(x-1) - \frac{8}{3}(x-1)^3\right) + (x-1)^3\varepsilon(x-1) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 1}\varepsilon(x-1) = 0.$$

Correction : Pour simplifier les calculs, on va poser $x = 1 + u$.
D'après la question précédente, on obtient alors $p(1+u) = 3 + 2u - 2u^2 = 3 + P(u)$.
On doit donc écrire un développement limité de f au voisinage de $a = 3$:
$e^{(3+h)} = e^3\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!}\right) + h^3\varepsilon(h) = Q(h) + h^3\varepsilon(h)$.
On peut donc calculer $Q(P(u))$ en supprimant les termes de degré > 3 :

$$\begin{aligned}
\varphi(1+u) &= e^3\left(1 + (2u-2u^2) + \frac{(2u-2u^2)^2}{2} + \frac{(2u-2u^2)^3}{6}\right) + u^3\varepsilon(u) \\
&= e^3\left(1 + (2u-2u^2) + \frac{4u^2-8u^3}{2} + \frac{8u^3}{6}\right) + u^3\varepsilon'(u) \\
&= e^3\left(1 + 2u - \frac{8u^3}{3}\right) + u^3\varepsilon'(u) \quad \text{avec} \quad \lim_{u\to 0}\varepsilon'(u) = 0
\end{aligned}$$

ou encore

$$\varphi(x) = e^3\left(1 + 2(x-1) - \frac{8}{3}(x-1)^3\right) + (x-1)^3\varepsilon'(x-1) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 1}\varepsilon'(x-1) = 0.$$

(d) Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \varphi(x)$. On note M_0 le point d'abcisse $x_0 = 1$.

i. Quelle est l'équation $y = t(x)$ de la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 ?

Correction : D'après la question précédente, on trouve $t(x) = e^3(1 + 2(x-1))$.

ii. Pour x proche de de x_0, quel est le signe de $\varphi(x) - t(x)$?

Correction : $\varphi(x) - t(x) = (x-1)^3 \left(-\frac{8}{3}e^3 + \varepsilon'(x-1) \right)$.

$-\frac{8}{3}e^3 < 0$ donc, pour x proche de de $x_0 = 1$, la parenthèse est négative.

$\varphi(x) - t(x)$ est donc négatif pour $x \geq 1$ et positif pour $x \leq 1$.

iii. En déduire la position de la courbe par rapport à la tangente.

Correction : La courbe est au-dessus de la tangente puis en dessous de la tangente : il s'agit d'un point d'inflexion.