Médian MT91 - A2014

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Barème approximatif (10, 10).

Exercice 1 CHANGER DE COPIE

1. (a) Montrer que $g(u) = \sqrt{1+u}$ admet un développement de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de 0 et le calculer.
   (b) En déduire le développement limité de $\sqrt{4+y+y^2}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   (c) Soit la fonction $f(x) = \sqrt{4x^2+x+1}$.
      i. Ecrire le développement limité de $\dfrac{f(x)}{x}$.
      ii. Etudier la branche infinie de f lorsque x tend vers $+\infty$.
      On précisera l'équation de l'asymptote et la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
2. (a) Soit le fonction $f_1(x) = \tan x$, écrire le développement de Taylor-Young de f_1 à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.
   (b) A quelle condition sur x_0 la fonction $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ admet-elle un dénveloppement de Taylor-Young, à l'ordre 2, au voisinage de x_0 ? Déterminer alors ce développement.
   (c) Soit la fonction f_2 définie par

$$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\cos x + 1}.$$

   Utiliser la question précédente pour obtenir le développement limité de f_2 à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.
   (d) Soit la fonction f définie par

$$f(x) = f_1(x) f_2(x),$$

   calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.
   (e) Retrouver le résultat de la question précédente en effectuant une division suivant les puissantes croissantes.

Médian MT91 - A2015

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 11) **CHANGER DE COPIE**
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Soit $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. On définit $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Justifier l'existence d'un développement limité de la fonction g à l'ordre 3 , au voisinage de a, et le calculer.
   (b) Donner le développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre 3, de la fonction $\cos x$.
   (c) On définit
   $$\varphi(x) = \frac{1}{2 + x\cos x}.$$
   Utiliser la question 1(a), en précisant la valeur de a, pour obtenir un développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre 3, de la fonction φ.
   (d) Retrouver le résultat de la question précédente en effectuant une division suivant les puissances croissantes.
   (e) Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \varphi(x)$. On note M_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0.
      i. Quelle est l'équation $y = t(x)$ de la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 ?
      ii. Pour x proche de 0, quel est le signe de $\varphi(x) - t(x)$?
      iii. En déduire la position de la courbe par rapport à la tangente.
2. Soit f une fonction dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ telle que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
   On suppose que f' admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$:
   $$f'\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + h^3\varepsilon(h).$$
   (a) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 4 au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$.
   (b) Déterminer le développement limité de f^2 à l'ordre 3 au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$ (où f^2 est le carré de la fonction f).
   (c) On définit $f(x) = \tan x$.
      i. Quelle relation lie $f(x)$ et $f'(x)$?
      ii. Utiliser ce qui précède pour calculer $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ et α_3 (il ne faut en aucun cas calculer les dérivées successives de f).
      iii. En déduire le développement limité de f à l'ordre 4 au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$.
      iv. Exprimer $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ et α_3 et en déduire leur valeur.

Médian MT91 - A2016

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Barème approximatif (10, 10).

Exercice 1 CHANGER DE COPIE

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Justifier l'utilisation de la formule de Taylor-Young, et l'écrire, pour obtenir un développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $g(x) = \ln(1+x)$.

   (b) Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction

   $$f_1(x) = \ln(1 + \ln(1+x)).$$

   (c) On considère à présent la fonction

   $$f_2(x) = \frac{f_1(x)}{1+x}.$$

   i. Calculer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $f_2(x)$ en utilisant la multiplication des développements limités.

   ii. Retrouver ce résultat en faisant une division suivant les puissances croissantes.

2. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = e^x$.
   Ecrire le développement limité, au voisinage de a, à l'ordre 3, de la fonction f.

   (b) On définit le polynôme p par $p(x) = -1 + 6x - 2x^2$.
   Utiliser la formule de Taylor pour les polynômes pour écrire p sour la forme :

   $$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-1) + \alpha_2(x-1)^2.$$

   On préciserera les valeurs de $\alpha_0,\ \alpha_1$ et α_2

   (c) On définit la fonction

   $$\varphi(x) = e^{p(x)}.$$

   Utiliser ce qui précède pour obtenir un développement limité, au voisinage de $x_0 = 1$, à l'ordre 3, de la fonction φ.

   (d) Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \varphi(x)$. On note M_0 le point d'abcisse $x_0 = 1$.

   i. Quelle est l'équation $y = t(x)$ de la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 ?

   ii. Pour x proche de de x_0, quel est le signe de $\varphi(x) - t(x)$?

   iii. En déduire la position de la courbe par rapport à la tangente.