Médian MT91/MA91 - P2018

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 11) **CHANGER DE COPIE**
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $G(x) = 2 + \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$.

   (a) Justifier l'existence d'un développement limité de la fonction G à l'ordre 4 , au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

   Correction : La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est au moins 3 fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction G est une primitive de g donc G est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(x) = g(x)$. Par conséquent, G est au moins 4 fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet un développement de Taylor-Young à l'ordre 4 en tout point $a \in \mathbb{R}$. Autrement-dit, G admet une développement limité à l'ordre 4 en tout point $a \in \mathbb{R}$.

   (b) Donner le développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre 4, de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

   Correction : On écrit $g(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$. On utilise le développement limité usuel de $(1+X)^{-\frac{1}{2}}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2, que l'on compose avec $x \mapsto x^2$.

   $$(1+X)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}X^2 + X^2\varepsilon_0(X), \qquad \text{avec } \varepsilon_0(X) \underset{X\to 0}{\to} 0$$

   On obtient

   $$g(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^4\varepsilon_1(x), \qquad \text{avec } \varepsilon_1(x) = \varepsilon_0(x^2) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

   (c) En déduire le développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre 4 de la fonction G.

   Correction : Par intégration du développement limité de g en 0 tronqué à l'ordre 3, on sait qu'il existe une fonction $\widetilde{\varepsilon}$ telle que $\widetilde{\varepsilon}(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$ et

   $$G(x) = G(0) + \int_0^x \left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)dt + x^4\widetilde{\varepsilon}(x) = \quad 2 + x - \frac{1}{6}x^3 + x^4\widetilde{\varepsilon}(x)$$

   (d) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de G. On note M_0 le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.

      i. Quelle est l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0 ?

      Correction : L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0 est donnée par la partie régulière d'ordre 1 du $DL_4(0)$ de G. L'équation de la tangente est donc

      $$y = 2 + x$$

ii. Préciser la position de la courbe par rapport à la tangente.

Correction : On étudie le signe de $G(x) - (2+x)$ pour $x < 0$ et $x > 0$. On a

$$G(x) - (2+x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^4\widetilde{\varepsilon}(x)$$

- Si $x < 0$ alors $-\frac{1}{6}x^3 > 0$ donc la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la tangente.
- Si $x > 0$ alors $-\frac{1}{6}x^3 < 0$ donc la courbe $\mathscr{C}$ est située sous la tangente.

La tangente traverse la courbe $\mathscr{C}$, M_0 est un point d'inflexion.

(e) On définit

$$\varphi(x) = \frac{G(x)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

En effectuant une division selon les puissances croissantes, déterminer le développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre 3, de la fonction φ.

Correction : On a $\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{+\frac{1}{2}} \underset{x\sim 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$.

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
2 & + & x & - & \frac{x^3}{6} & & & & & \\
 & & x & - & x^2 & - & \frac{x^3}{6} & \ldots & & 1+\frac{1}{2}x^2 \\
\hline
 & & & - & x^2 & - & \frac{2x^3}{3} & \ldots & & 2+x-x^2-\frac{2x^3}{3} \\
 & & & & & - & \frac{2x^3}{3} & \ldots & &
\end{array}$$

On a donc

$$\varphi(x) = 2 + x - x^2 - \frac{2x^3}{3} + x^3\varepsilon_3(x), \quad \text{avec } \varepsilon_3(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

(f) Déterminer le développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre 4, de $\frac{(G(x))^2}{2}$.

Correction : On utilise la règle des produits de développements limités

$$\begin{aligned}
\frac{(G(x))^2}{2} &= \frac{1}{2}\left(2 + x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + x^3\varepsilon_4(x) \\
&= \frac{1}{2}\left(4 + 4x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4\right) + x^4\varepsilon_5(x) \\
&= 2 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + x^4\varepsilon_6(x)
\end{aligned}$$

(g) Commenter les deux derniers résultats.

Correction : On remarque que la dérivée de $x \mapsto \frac{(G(x))^2}{2}$ est la fonction φ. Le développement limité en 0 de la première fonction s'obtient par intégration du développement limité de $\varphi(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$. On admet que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et on note f^{-1} la fonction réciproque de f.

(a) On suppose que f^{-1} admet le développement limité, au voisinage de 1, à l'ordre 3 suivant :

$$f^{-1}(1+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + h^3 \varepsilon(h), \quad \text{où } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$$

Déterminer le développement limité de $f^{-1} \circ f$, au voisinage de $x = 0$, à l'ordre 3.

Correction : On doit composer le $DL_3(0)$ de f avec le $DL_3(b)$ de f^{-1} où $b = f(0) = 1$. Comme f est un polynôme de degré 3, la partie régulière du $DL_3(0)$ de $f(x)$ est $f(x)$ et le reste est nul. On range les termes dans l'ordre des puissances croissantes

$$f(x) = 1 + x + x^3$$

et on substitue $h = x + x^3$ dans le DL de f^{-1} au voisinage de 1 pour obtenir

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f(x) &= \alpha_0 + \alpha_1(x + x^3) + \alpha_2(x + x^3)^2 + \alpha_3(x + x^3)^3 + x^3\varepsilon_7(x) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + x^3 \varepsilon_8(x) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + (\alpha_1 + \alpha_3)x^3 + x^3\varepsilon_8(x) \end{aligned}$$

(b) Sachant que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, déterminer les coefficients α_0, α_1, α_2 et α_3.

Correction : Puisque $f^{-1} \circ f(x) = x$, on en déduit que

$$\alpha_0 = 0\,, \quad \alpha_1 = 1\,, \quad \alpha_2 = 0\,, \quad \alpha_3 = -\alpha_1 = -1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_8(x) = 0$$

Le développement limité de f^{-1} au voisinage de 1 est donc

$$f^{-1}(1+h) = h - h^3 + h^3\varepsilon(h)$$

(c) La fonction f^{-1} est-elle un infiniment petit au voisinage de 1 ?
Si oui, préciser sa partie principale et son ordre.

Correction : On a $\lim\limits_{h\to 0} f^{-1}(1+h) = 0$ donc f^{-1} est un infiniment petit au voisinage de 1. Sa partie principale est le premier terme du $DL_3(1)$, h ou $(x-1)$, et son ordre est 1.

Exercice 2 (Barème approximatif : 9) **CHANGER DE COPIE**

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{1}{n}$ et $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$. On définit u_n et U_n des fonctions étagées sur $[0,1]$ par :

$$u_n(x) = f(x_i) \text{ sur }]x_{i-1}, x_i[,\ i = 1, \ldots, n.$$

$$U_n(x) = f(x_{i-1}) \text{ sur }]x_{i-1}, x_i[,\ i = 1, \ldots, n.$$

On définit également la série $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}$.

(a) Montrer que pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, \ldots, n$, on a $u_n(x) \leq f(x) \leq U_n(x)$.

Correction : Soit $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, \ldots, n$. Sachant que les réels $x_0, \ldots, x_n$ sont positifs, on a

$$\begin{aligned} x_{i-1} < x < x_i \Rightarrow x_{i-1}^2 < x^2 < x_i^2 &\Rightarrow 1 + x_{i-1}^2 < 1 + x^2 < 1 + x_i^2 \\ &\Rightarrow u_n(x) = f(x_i) < \frac{1}{1+x^2} < U_n(x) = f(x_{i-1}). \end{aligned}$$

(b) Montrer que

$$\int_0^1 u_n(x) = S_n \quad \text{et} \quad \int_0^1 U_n(x) = S_n + \frac{1}{2n}$$

Correction : La fonction u_n est étagée donc

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 U_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{1}{1+(\frac{i-1}{n})^2}\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\times\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+i^2}\\ &= S_n + \frac{n}{n^2+0^2} - \frac{n}{n^2+n^2} = S_n + \frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

(c) Rappeler la définition avec quantificateur(s) de "f est intégrable sur $[0,1]$".

Correction : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) \le f(x) \le U_n(x)$ et

$$\int_0^1 (U_n(x) - u_n(x))\,dx < \varepsilon.$$

(d) Utiliser cette définition pour montrer que f est intégrable sur $[0,1]$.

Correction : Soit $\varepsilon > 0$. L'inégalité est déjà démontrée. On résoud

$$\int_0^1 (U_n(x) - u_n(x))\,dx < \varepsilon \Leftrightarrow \left(S_n + \frac{1}{2n}\right) - S_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon}$$

La propriété d'Archimède justifie l'existence de $n \in \mathbb{N}$. Comme $\frac{1}{2\varepsilon} > 0$ on a $n \in \mathbb{N}^*$. On peut même choisir $n = E(\frac{1}{2\varepsilon}) + 1$.

(e) Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Correction : On a

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\mathrm{Arctan}\,x\Big]_0^1 = \mathrm{Arctan}\,(1) - \mathrm{Arctan}\,(0) = \frac{\pi}{4}$$

(f) En déduire que la série S_n converge et préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Correction : On a montré que f est intégrable donc on a

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx \le \sup A = \int_0^1 f(x)\,dx = \inf B \le \int_0^1 U_n(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad S_n \le \int_0^1 f(x)\,dx \le S_n + \frac{1}{2n}.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \le \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4} \le \lim_{n\to+\infty} (S_n + \frac{1}{2n})$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} (S_n + \frac{1}{2n}) = \lim_{n\to+\infty} S_n$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \le \frac{\pi}{4} \le \lim_{n\to+\infty} S_n \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} \le \lim_{n\to+\infty} S_n \le \frac{\pi}{4}$$

Donc S_n converge et $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$.

2. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x \neq 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} f(t)dt$.

   (a) Donner la valeur de $F(1)$.

   Correction : On a

$$F(1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0\ .$$

   (b) Énoncer le premier théorème de la moyenne.

   Correction : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $a < b$. Alors $\exists\, c \in]a, b[$,

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)f(c).$$

   (c) Soit $x \in]1, +\infty[$, montrer que

$$\exists\, c \in]\tfrac{1}{x}, x[,\ \frac{F(x)}{x-1} = -\frac{1+x}{x} f(c).$$

   Correction : Soit $x \in]1, +\infty[$. Alors $[\frac{1}{x}, x]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $[\frac{1}{x}, x]$. D'après le premier théorème de la moyenne, $\exists\, c \in]\frac{1}{x}, x[$, tel que

$$\int_x^{\frac{1}{x}} f(t)\,dt = -\int_{\frac{1}{x}}^x f(t)\,dt = -\left(x - \frac{1}{x}\right) f(c) = -\frac{x^2-1}{x} f(c).$$

   Par conséquent

$$\frac{F(x)}{x-1} = -\frac{x+1}{x} f(c).$$

   (d) En déduire que la fonction F est dérivable en $x = 1$ et préciser $F'(1)$.

   Correction : Pour étudier la dérivabilité de F en $x = 1$ on doit étudier l'existence d'une limite du taux d'accroissement de F en 1 quand $x \to 1$.

   On utilise le résultat de la question précédente pour $x > 1$:

$$\frac{F(x) - F(1)}{x-1} = -\frac{x+1}{x} f(c) \underset{x\to1^+}{\to} -2f(1)$$

   car d'après le théorème des gendarmes $\frac{1}{x} < c < x \ \Rightarrow\ c \underset{x\to1^+}{\to} 1$ et f est continue donc $f(c) \underset{x\to1^+}{\to} f(1)$.

   Pour $0 < x < 1$, on a le même résultat qu'à la question **2.c)** avec $c \in]x\,, \frac{1}{x}[$ donc

$$\frac{F(x) - F(1)}{x-1} \underset{x\to1^-}{\to} -2f(1).$$

   Les limites à gauche et à droite sont identiques donc la limite du taux d'accroissement existe et on peut conclure que F est dérivable en $x = 1$ avec $F'(1) = -2f(1)$.