Médian MT91/MA91 - P2020

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 5) **CHANGER DE COPIE**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p(x) = 2 - \alpha x - x^3$.
   (a) À l'aide de la formule de Taylor, déterminer les réels a_0, a_1, a_2 et a_3 tels que
   $$p(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3.$$
   (b) Pour quelle valeur de α, le polynôme p est-il un infiniment petit au voisinage de $a = 1$.
   (c) Dans ce cas, préciser sa partie principale et son ordre.
2. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1 - \cos(2 \ln x)$.
   (a) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de $a = 1$.
   (b) Pour $\alpha = 3$, déterminer la limite suivante $\lim\limits_{x \to 1} \frac{p(x)}{f(x)}$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 6) **CHANGER DE COPIE**

1. Soit f_1 la fonction définie par $f_1(x) = 2 + x \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{1+2t}}\, dt$.
   (a) Préciser le domaine de définition D de la fonction f_1.
   (b) Justifier l'existence du développement de Taylor-Young de f_1 à l'ordre 4 en tout point $a \in D$.
   (c) Montrer que le développement limité de la fonction f_1 à l'ordre 4 au voisinage de $a = 0$ est
   $$f_1(x) = 2 + x^2 + \frac{x^4}{3} + x^4 \varepsilon(x), \qquad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\to} 0.$$
   (d) En déduire que la fonction f_1 admet un extremum local en $x_* = 0$.
   Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum local.
2. Pour $x > 0$, on pose $f_2(x) = (1-x) f_1(\frac{1}{\sqrt{x}})$.
   (a) Montrer que la courbe représentative de f_2, notée $\mathscr{C}_{f_2}$, admet une droite asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on précisera l'équation.
   (b) Indiquer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_{f_2}$ par rapport à son asymptote.

Exercice 3 (Barème approximatif : 10) **CHANGER DE COPIE**

Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$.

1. Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \ell_2.$$

On note $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$.
On admet que $\tilde{f}$ est croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{1}{n}$ et $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$. On définit u_n et U_n des fonctions étagées sur $[0,1]$ par :

$$u_n(x) = \tilde{f}(x_i) \text{ sur } [x_i, x_{i+1}[,\ i = 0, \ldots, n-1.$$
$$U_n(x) = \tilde{f}(x_{i+1}) \text{ sur }]x_i, x_{i+1}],\ i = 0, \ldots, n-1.$$

On pose $S_n = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{\ln n - \ln i}$.

(a) Montrer que

$$\int_0^1 u_n(x)\, dx = S_n \quad \text{et} \quad \int_0^1 U_n(x)\, dx = S_n + \frac{\ell_2}{n}.$$

(b) Utiliser la définition avec quantificateurs pour montrer que $\tilde{f}$ est intégrable sur $[0,1]$.

3. Soit F la fonction définie sur $[0,1[$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt$ pour $x \neq 0$ et $F(0) = 0$.

(a) Calculer $F'(x)$ pour $x \in]0,1[$.

(b) En déduire que $F(x) = \displaystyle\int_0^x \tilde{f}(t)\, dt$.

(c) À l'aide du second théorème de la moyenne, montrer que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\text{il existe } c \in]x^2, x[\text{ tel que} \quad F(x) = c \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t}\, dt\ .$$

(d) Montrer que $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t}\, dt = \ln(2)$. *(Indication : calculer la dérivée de* $\ln(-\ln t)$.*)*

(e) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} F(x)$.

4. Déduire des questions précédentes que la série S_n converge et préciser sa limite.