Université de Technologie de Compiègne **MT90**

— MÉDIAN A17 : DURÉE : 1 HEURE—

Date : 05 Octobre 2017

Rendez une copie par exercice (même si elle est blanche)

(*Changer de copie*)

Exercice I (7 points)— Les deux parties I et II sont indépendantes.

I- Soient les quatre propositions suivantes :

(a) $\exists p \in \mathbb{Z}; \quad \exists n \in \mathbb{N}; \quad p \leq -n^2$; (b) $\forall p \in \mathbb{Z}; \quad \exists n \in \mathbb{N}; \quad p \leq -n^2$;

(c) $\exists p \in \mathbb{Z}; \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad p \leq -n^2$; (d) $\forall p \in \mathbb{Z}; \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad p \leq -n^2$.

1. Les propositions (a), (b), (c) et (d) sont-elles vraies ou fausses? Jusitifier vos réponses.
2. Donner leur négation.

II- Soit E un ensemble et soit f une application de E dans E vérifiant $fof = f$.

1. Montrer, par double implication, l'équivalence entre les propositions (a) et (b) suivantes:
   (a) f injective
   (b) f surjective
2. En déduire l'équivalence : (f injective) $\Longleftrightarrow$ (f bijective)

(*Changer de copie*)

Exercice II (7 points)—

Soit $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite réelle bornée. On définit la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ par

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = \sup\{u_k,\ k \geq n\}.$$

1. On note par $A_n = \{u_k,\ k \geq n\}$. Montrer que A_n est un ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est bien définie.
2. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non vides majorés tel que $A \subset B$. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.
3. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
4. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge.

(*Changer de copie*)

Exercice III (7 points)—

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. On souhaite établir que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

converge vers la même limite l. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Justifier l'existence d'un entier $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n > N_0$ alors

$$|u_n - l| < \varepsilon/2$$

2. Etablir que pour tout entier $n > N_0$, on a

$$|v_n - l| < \frac{|u_1 - l| + \ldots + |u_{N_0} - l|}{n} + \frac{(n - N_0)}{n}\frac{\varepsilon}{2}$$

3. L'entier N_0 étant fixé dans la question 1.), vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n > N_0$ alors

$$\frac{n - N_0}{n} < 1$$

4. L'entier N_0 étant fixé dans la question 1.), montrer qu'il existe $N_1 \geq 1$ un entier naturel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n > N_1$ alors

$$\frac{|u_1 - l| + \ldots + |u_{N_0} - l|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Indication: On remarquera que, pour N_0 fixé, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{N_0} |u_k - l|$ est indépendante de l'entier naturel n.

5. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers la limite l.

6. *Application*: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = l$. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge vers l.