Université de Technologie de Compiègne **MT91**

— MÉDIAN P17 : DURÉE : 1 HEURE—

Date : 3 Juin 2017

Rendez une copie par exercice (même si elle est blanche)

(**Changer de copie**)

Exercice I (12 points)—

Les parties I, II et III sont indépendantes

I (a) Ecrire le développement de Taylor-Young des fonctions $\cos(x)$ et $\mathrm{ch(x)}$ à l'ordre 2 en $x_0 = 0$. (On rappelle que la fonction $\mathrm{ch(x)} = \dfrac{\mathrm{e^x + e^{-x}}}{2}$)

(b) Ecrire le développement limité de la fonction $f(x) = e^{\cos(x)} - e^{\mathrm{ch(x)}}$ à l'ordre 2 en $x_0 = 0$. La fonction f est elle un infiniment petit au voisinage de 0 ? Si oui préciser l'ordre et sa partie principale.

(c) Ecrire le développement limité de la fonction $g(x) = \cos(x) - \mathrm{ch(x)}$ à l'ordre 2 en $x_0 = 0$. La fonction g est elle un infiniment petit au voisinage de 0 ? Si oui préciser l'ordre et sa partie principale.

(d) En déduire que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = e$$

II (a) Rappeler, en vérifiant ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2 de la fonction $\ln(1 + x)$.

(b) Prouver que si $\theta > 0$ et si $x > 0$ alors $0 < \dfrac{1}{(1 + \theta x)^3} < 1$. En déduire que pour $x > 0$

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

(c) Pour quelles valeurs de x cette inégalité permet-elle d'affirmer que $x - \frac{x^2}{2}$ est une valeur approchée de $\ln(1 + x)$ à 10^-3 près ?
Application: Donner une valeur approchée de $\ln(1.1)$.

III (a) Dans cette question on définit la fonction $h(x) = x^2 \ln(1 + x) - x^2 \ln(x)$ pour tout $x > 0$. En procédant éventuellement au changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, montrer que h admet un développement asymtotique au voisinage de $+\infty$:

$$h(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o(\frac{1}{x}),$$

où a, b et c sont des réels à déterminer.

(b) En déduire que le graphe de h admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on donnera l'equation. On étudiera sa position par rapport au graphe de h.

(**Changer de copie**)

Exercice II (5 points)—

1. (a) Démontrer que, $\tan h = h + \dfrac{h^3}{3} + o(h^3)$ au voisinage de 0.
   (b) Rappeler le développement limité de $\ln(1+h)$ à l'ordre 3 en 0.
   (c) Calculer le développement limité de $\ln(1+\tan h) - \ln(1-\tan h)$ à l'ordre 3 en 0.

2. On rappelle que
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$
   (a) Déduire des questions précédentes le développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$ de la fonction $f(x) = \ln(\tan x)$.
   (b) En déduire que le graphe de f admet une tangente T au point d'abcisse $\frac{\pi}{4}$. Donner une équation cartésienne de T et préciser la position du graphe de f par rapport à cette tangente.

(**Changer de copie**)

Exercice III (6 points)—

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 - x$. Soit n un entier strictement positif, on considère la subdivision de $[0,1]$ donnée par $x_i = \frac{i}{n}$, $0 \leq i \leq n$.

1. (a) On définit la fonction étagée
$$u_n(x) = 1 - x_{i+1},\ \forall x \in [x_i, x_{i+1}[,\ 0 \leq i \leq n-1$$
   Calculer
$$\int_0^1 u_n(x)\, dx.$$
   (b) On définit la fonction étagée
$$U_n(x) = 1 - x_i,\ \forall x \in [x_i, x_{i+1}[,\ 0 \leq i \leq n-1$$
   Calculer
$$\int_0^1 U_n(x)\, dx.$$

2. (a) Montrer que $\forall x \in [0,1],\ u_n(x) \leq f(x) \leq U_n(x)$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 (U_n(x) - u_n(x))\, dx$. En déduire que f est intégrable sur $[0,1]$.
   (c) Calculer les limites
$$l_1 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n(x)\, dx \quad \text{et} \quad l_2 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 U_n(x)\, dx$$
   En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.