Université de Technologie de Compiègne **MT91**

— CORRIGÉ- MÉDIAN P17 : DURÉE : 1 HEURE—

Date : 3 Juin 2017

Rendez une copie par exercice (même si elle est blanche)

(**Changer de copie**)

Exercice I (12 points)—

Les parties I, II et III sont indépendantes

I (a) Ecrire le développement de Taylor-Young des fonctions $\cos(x)$ et $\mathrm{ch(x)}$ à l'ordre 2 en $x_0 = 0$. (On rappelle que la fonction $\mathrm{ch(x)} = \dfrac{\mathrm{e^x + e^{-x}}}{2}$)

Les fonctions $\cos(x)$ *et* $\mathrm{ch(x)}$ *sont indéfiniment dérivables dans tout* $\mathbb{R}$ *en particulier en* 0*, on a les développements de Taylor-Young à l'ordre* 2 *en* $x_0 = 0$ *suivant*

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos(0) + \frac{x}{1!}\cos'(0) + \frac{x^2}{2!}\cos''(0) + x^2\varepsilon_1(x)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x), \quad \textit{avec} \ \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ch(x)} &= \mathrm{Ch}(0) + \frac{\mathrm{x}}{1!}\mathrm{ch}'(0) + \frac{\mathrm{x}^2}{2!}\mathrm{ch}''(0) + \mathrm{x}^2\varepsilon_2(\mathrm{x})\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x), \quad \textit{avec} \ \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0.\end{aligned}$$

(b) Ecrire le développement limité de la fonction $f(x) = e^{\cos(x)} - e^{\mathrm{ch(x)}}$ à l'ordre 2 en $x_0 = 0$. La fonction f est elle un infiniment petit au voisinage de 0 ? Si oui préciser l'ordre et sa partie principale.

D'après I.a)

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et on a

$$\mathrm{ch(x)} = 1 + \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \mathrm{o(x^2)}$$

Par composition de la fonction e^x *avec* $\cos(x)$ *et* $\mathrm{ch(x)}$ *on obtient*

$$e^{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} - e^{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = e.e^{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} + e.e^{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}.$$

Or $\pm\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ *tend vers* 0 *quand* x *tend vers* 0*, on obtient alors le DL de* f *en composant celle-ci avec le DL de la fonction* e^x *au voisinage de* 0 *à l'ordre* 2*:*

$$f(x) = e.\big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\big) - e.\big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\big) = -ex^2 + o(x^2)$$

On conclut que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ *donc* f *est un infiniment petit au voisinage de* 0 *d'ordre* 2 *dont la partie principale est* $-ex^2$.

(c) Ecrire le développement limité de la fonction $g(x) = \cos(x) - \mathrm{ch(x)}$ à l'ordre 2 en $x_0 = 0$. La fonction g est elle un infiniment petit au voisinage de 0 ? Si oui préciser l'ordre et sa partie principale.

D'après la question précédente on a

$$g(x) = \cos(x) - \mathrm{ch(x)} = \big(1 - \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)\big) - \big(1 + \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)\big) = -\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)$$

On conclut que $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ *donc* g *est un infiniment petit au voisinage de* 0 *d'ordre* 2 *dont la partie principale est* $-x^2$.

(d) En déduire que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = e$$

De la question I.b) et I.c) on peut écrire, au voisinage de 0, *que*

$$\frac{e^{\cos(x)} - e^{\mathrm{ch(x)}}}{\cos(x) - \mathrm{ch(x)}} = \frac{-ex^2 + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} = \frac{-e + o(1)}{-1 + o(1)}$$

d'où la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = e$$

II (a) Rappeler, en vérifiant ses hypothèses, la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2 de la fonction $\ln(1 + x)$.

La fonction $f(x) = \ln(1 + x)$ *est trois fois (en effet indéfiniment) dérivable sur l'intervalle* $]-1, +\infty[$. *La formule de Taylor-Lagrange en* 0 *à l'ordre* 2 *de* $f(x)$ *se décline alors comme suit:* $\forall x \in]-1, +\infty[, \ \exists\, \theta \in]0, 1[$ *tel que*

$$\ln(1 + x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3,$$

or $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ *et* $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ *donc*

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1 + \theta x)^3}.$$

(b) Prouver que si $\theta > 0$ et si $x > 0$ alors $0 < \dfrac{1}{(1 + \theta x)^3} < 1$. En déduire que pour $x > 0$

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Si $\theta > 0$ *et si* $x > 0$ *alors* $1 + \theta x > 1$ *donc* $(1 + \theta x)^3 > 1$ *par conséquent* $0 < \dfrac{1}{(1 + \theta x)^3} < 1$.

Pour $x > 0$ *on a d'après la double inégalité précédente* $0 < \dfrac{x^3}{3(1 + \theta x)^3} < \dfrac{x^3}{3}$ *d'où le résultat*

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

(c) Pour quelles valeurs de x cette inégalité permet-elle d'affirmer que $x - \frac{x^2}{2}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^-3 près ?
Application: Donner une valeur approchée de $\ln(1.1)$.

L'inégalité de la question précédente permet d'affirmer que $x - \frac{x^2}{2}$ *est une valeur approchée de* $\ln(1+x)$ *à* 10^{-3} *près dès que* $0 < \frac{x^3}{3} \leq 10^{-3}$ *ou encore dès que* $0 < x \leq \sqrt[3]{3}\ 10^{-1}$ *(on peut même préciser qu'il s'agit d'une valeur approchée par défaut).*
Application: On note que $\ln(1.1) = \ln(1+0.1)$. *Or si* $x = 0.1 > 0$ *on a* $0 < x \leq \sqrt[3]{3}\ 10^{-1}$ *et donc* $0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} = 0.095$ *est une valeur approchée de* $\ln(1.1)$ *à* 10^{-3} *par défaut.*

III (a) Dans cette question on définie la fonction $h(x) = x^2\ln(1+x) - x^2\ln(x)$ pour tout $x > 0$. En procédant éventuellement au changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, montrer que h admet un développement asymtotique au voisinage de $+\infty$:

$$h(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o(\frac{1}{x}),$$

où a, b et c sont des réels à déterminer.

Pour tout $x > 0$ *on a*

$$h(x) = x^2\ln(\frac{1+x}{x}) = x^2\ln(1+\frac{1}{x})$$

Si on pose $t = \frac{1}{x}$ *l'expression de la fonction* h *devient alors* $h(t) = \frac{1}{t^2}\ln(1+t)$. *D'autre part quand* $x \to +\infty$ *on a* $t \to 0$, *donc on peut utiliser le DL de la fonction* $\ln(1+t)$ *au voisinage de* 0 *à l'ordre* 3 *:* $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$. *Il en découle l'expression du DL de la fonction* $h(t)$ *suivant*

$$h(t) = \frac{1}{t^2}\ln(1+t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}t + o(t).$$

En utilisant le changement de variavle $x = \dfrac{1}{t}$, *on obtient le développement asymtotique au voisinage de* $+\infty$

$$h(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o(\frac{1}{x}),$$

donc $a = 1, b = -\frac{1}{2}$ *et* $c = \frac{1}{3}$.

(b) En déduire que le graphe de h admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on donnera l'equation. On étudiera sa position par rapport au graphe de h.

D'après la question précédente et le développement asymtotique au voisinage de $+\infty$ *de la fonction* h*; son graphe admet une asymtote oblique* A *dont l'équation est* $A : y = x - \frac{1}{2}$.
Pour déderminer sa position par rapport au graphe de h *on étudie le signe de la différence* $D = h(x) - (x - \frac{1}{2})$ *au voisinage de* $+\infty$. *Or d'après* $III - a)$ *le signe de* D *est celui de* $\frac{1}{3x} > 0$*; on en déduit que la courbe de* h *est au-dessus de l'asymtote* A.

(**Changer de copie**)

Exercice II (5 points)—

1. (a) Démontrer que, $\tan h = h + \dfrac{h^3}{3} + o(h^3)$ au voisinage de 0.

On a à effectuer un quotient de développements limités :

$$\tan h = \frac{\sin h}{\cos h} = \frac{h - \frac{h^3}{3!} + o(h^3)}{1 - \frac{h^2}{2!} + o(h^3)}$$

Or, le quotient de la division selon les puissances croissantes de $h - \frac{h^3}{6}$ *par* $1 - \frac{h^2}{2}$ *à l'ordre* 3 *est* $h + \frac{h^3}{3}$ *donc*

$$\tan h = h + \frac{h^3}{3} + o(h^3).$$

(b) Rappeler le développement limité de $\ln(1+h)$ à l'ordre 3 en 0.

On rappelle le DL de $\ln(1+h)$ *à l'ordre 3 en* 0*:*

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3).$$

(c) Calculer le développement limité de $\ln(1+\tan h) - \ln(1-\tan h)$ à l'ordre 3 en 0.

Etant donné que $t = \pm \tan h$ *tend vers* 0 *quand* h *tend vers* 0*,on obtient le DL de* $\ln(1+\tan h) - \ln(1-\tan h)$ *par composition des DLs de* $\ln(1+t)$ *avec* $t = \pm \tan h$*:*

$$\begin{aligned}
\ln(1+\pm\tan h) &= ln\big[1 \pm \big(h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\big)\big] \\
&= \pm\big(h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\big) - \frac{1}{2}\big[\pm\big(h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\big)\big]^2 + \\
&\quad \frac{1}{3}\big[\pm\big(h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\big)\big]^3 + o\Big(\big[\pm\big(h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\big)\big]^3\Big) \\
&= \pm h - \frac{1}{2}h^2 \pm \frac{2}{3}h^3 + o(h^3),
\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
\ln(1+\tan h) - \ln(1-\tan h) &= \big[h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{2}{3}h^3 + o(h^3)\big] - \big[-h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{2}{3}h^3 + o(h^3)\big] \\
&= 2h + \frac{4}{3}h^3 + o(h^3).
\end{aligned}$$

2. On rappelle que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

(a) Déduire des questions précédentes le développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$ de la fonction $f(x) = \ln(\tan x)$.

On pose $x = h + \frac{\pi}{4} (\Leftrightarrow h = x - \frac{\pi}{4})$ *donc d'après la formule trigonométrique, sachant que* $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$*, on a*

$$\tan(h + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan(\frac{\pi}{4}) + \tan(h)}{1 - \tan(\frac{\pi}{4})\tan(h)} = \frac{1 + \tan(h)}{1 - \tan(h)}$$

Du fait que h tend vers 0 quand x tends vers $\frac{\pi}{4}$, il en découle d'après la question 1. que

$$\begin{aligned}\ln(\tan(h+\frac{\pi}{4})) &= \ln\Big(\frac{1+\tan(h)}{1-\tan(h)}\Big)\\ &= \ln(1+\tan(h)) - \ln(1-\tan(h)) = 2h + \frac{4}{3}h^3 + o(h^3).\end{aligned}$$

Si bien que

$$\begin{aligned}\ln(\tan x) &= 2(x-\frac{\pi}{4}) + \frac{4}{3}(x-\frac{\pi}{4})^3 + o\big((x-\frac{\pi}{4})^3\big)\\ &= 2x - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}(x-\frac{\pi}{4})^3 + o\big((x-\frac{\pi}{4})^3\big).\end{aligned}$$

(b) En déduire que le graphe de f admet une tangente T au point d'abcisse $\frac{\pi}{4}$. Donner une équation cartésienne de T et préciser la position du graphe de f par rapport à cette tangente.

La fonction $f(x)$ est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ son graphe admet donc une tangente T au point d'abcisse $\frac{\pi}{4}$ d'équation :

$$T : y = f(\frac{\pi}{4}) + f'(\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4}),$$

Or d'après le DL de f en $\frac{\pi}{4}$ on déduit que

$$T : y = -\frac{\pi}{2} + 2x.$$

Afin de préciser la position de T par rapport au graphe de f, il suffit d'étudier localement, au voisinage de $\frac{\pi}{4}$, le signe de la différence $D = f(x) - y$ qui est donné localement par le DL précédent:

$$D = f(x) - (-\frac{\pi}{2} + 2x) = \frac{4}{3}(x-\frac{\pi}{4})^3 + o\big((x-\frac{\pi}{4})^3\big).$$

Il en découle qu'à droite de $\frac{\pi}{4}$ le graphe de f est au dessus de T et à gauche de $\frac{\pi}{4}$ le graphe de f est au dessous de T.

(**Changer de copie**)

Exercice III (6 points)—

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 - x$. Soit n un entier strictement positif, on considère la subdivision de $[0,1]$ donnée par $x_i = \frac{i}{n}$, $0 \leq i \leq n$.

1. (a) On définit la fonction étagée

$$u_n(x) = 1 - x_{i+1},\ \forall x \in [x_i, x_{i+1}[,\ 0 \leq i \leq n-1$$

Calculer

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx.$$

On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_n(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)u_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)(1-x_{i+1})\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(1-x_{i+1}) = \frac{1}{n}\times n - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(i+1)}{n}\\ &= 1 - \frac{1}{n}\times\frac{(n+1)n}{2n} = 1 - \frac{(n+1)}{2n}\end{aligned}$$

(b) On définit la fonction étagée

$$U_n(x) = 1 - x_i,\ \forall x \in [x_i, x_{i+1}[,\ 0 \le i \le n-1$$

Calculer

$$\int_0^1 U_n(x)\, dx.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 U_n(x)\, dx &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)U_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)(1-x_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(1-x_i) = \frac{1}{n}\times n - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n} \\
&= 1 - \frac{1}{n}\times\frac{(n-1)n}{2n} = 1 - \frac{(n-1)}{2n}
\end{aligned}$$

2. (a) Montrer que $\forall x \in [0,1],\ u_n(x) \le f(x) \le U_n(x)$.

On a $\forall x \in [0,1];\ \exists i \in \{0,1,2,\dots,n-1\};\ x_i \le x \le x_{i+1}$. *De plus la fonction* f *est décroissante sur* $[0,1]$ *on a alors* $1 - x_{i+1} \le 1 - x \le 1 - x_i$ *et donc* $u_n(x) \le f(x) \le U_n(x)$.

(b) Calculer $\int_0^1 (U_n(x) - u_n(x))\, dx$. En déduire que f est intégrable sur $[0,1]$.

D'après la question 1.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (U_n(x) - u_n(x))\, dx &= \int_0^1 U_n(x)\, dx - \int_0^1 u_n(x)\, dx \\
&= 1 - \frac{(n-1)}{2n} - (1 - \frac{(n+1)}{2n}) = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ *il suffit de choisir* n *tel que*

$$n \ge \frac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow \frac{1}{n} \le \varepsilon$$

On a alors d'une part $u_n(x) \le f(x) \le U_n(x);\ \forall x \in [0,1]$ *et d'autre part*

$$\int_0^1 (U_n(x) - u_n(x))\, dx \le \varepsilon$$

Ce qui montre par définition que f *est intégrable.*

(c) Calculer les limites

$$l_1 = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 u_n(x)\, dx \quad \text{et} \quad l_2 = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 U_n(x)\, dx$$

En déduire la valeur de $\int_0^1 f(x)\, dx$.

D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 u_n(x)\, dx &= \lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{(n+1)}{2n}) = \frac{1}{2} = l_1 \\
\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 U_n(x)\, dx &= \lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{(n-1)}{2n}) = \frac{1}{2} = l_2
\end{aligned}$$

On note I l'intégrale de f sur $[0,1]$, I étant, par définition, la borne sup de l'ensemble des intégrales des fonctions étagées inférieures ou égales à f donc pour tout n on a par définition de la borne sup

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx \le I$$

En utilisant les résultats sur les limites on obtient que

$$l_1 \le I$$

Le même raisonnement s'applique pour la borne inf de l'ensemble des intégrales des fonctions étagées supérieures ou égales à f donc pour tout n on a par définition de la borne inf

$$I \le \int_0^1 U_n(x)\,dx$$

En utilisant les résultats sur les limites on obtient que

$$I \le l_2$$

Il en découle que $l_1 \le I \le l_2$ et comme $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}$ alors $I = \frac{1}{2}$.