Université de Technologie de Compiègne **MT90**

— CORRIGÉ: FINAL P17—

(**Changer de copie**)

Exercice I (6 points)— (Les questions I. et II. sont indépendantes.)

I- (a) **Question de cours.** Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). Enoncer le théorème de Rolle pour une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$) et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$. Alors:

$$\exists c \in]a, b[;\ f'(c) = 0.$$

(b) Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable en tout point de I et s'annulant en trois points distincts $\alpha < \beta < \gamma$ de I. Montrer que la fonction dérivée seconde (notée f'') s'annule au mois une fois dans I.

La fonction f est dérivable sur l'ouvert I en particulier sur les deux intervalles $]\alpha, \beta[\subsetneq I$ et $]\beta, \gamma[\subsetneq I$ (entre autre elle est continue sur les segments $[\alpha, \beta]$ et $[\beta, \gamma]$ comme elle est dérivable sur tout I). De plus $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle on a

$$\exists c_1 \in]\alpha, \beta[;\ f'(c_1) = 0 \ \text{ et } \exists c_2 \in]\beta, \gamma[;\ f'(c_2) = 0.$$

On a $\alpha < c_1 < \beta < c_2 < \gamma$ donc sur l'intervalle non réduit à un point $[c_1, c_2] \subsetneq I$ la fonction dérivée f' est continue, dérivable sur $]c_1, c_2[$ et $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. On applique le théorème de Rolle à f' et on a le résultat escompté, c'est à dire

$$\exists c \in]c_1, c_2[\subset I;\ f''(c) = 0.$$

II- (a) **Question de cours.** Enoncer le théorème des accroissements finis.

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$) et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors:

$$\exists c \in]a, b[;\ f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

(b) Soient deux réels a et b (avec $a < b$) et soit f une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ telle que f' soit bornée. (C'est à dire il existe un réel $M \geq 0$ telle que $\sup\limits_{t \in]a,b[} |f'(t)| = M$).
Montrer que pour tout x, y dans $]a, b[$ on a $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

Dans le cas où $x = y$ le résultat est immédiat. On suppose, maintenant, que $x \neq y$ (soit par exemple $x < y$, le cas où $x > y$ s'en déduit de la même manière) alors dans l'intervalle $[x, y] \subset]a, b[$, f est continue, dérivable sur $]x, y[$ donc d'après *le théorème des accroissements on a* $\exists c \in]x,y[;\ f(x)-f(y)=f'(c)(x-y)$. *Comme* f' *est bornée dans* $]a,b[$ *on en déduit que*

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)||x-y|\leq \sup_{t\in]a,b[}|f'(t)|\times|x-y|\leq M|x-y|.$$

(c) Déduire que pour tout x,y dans $]a,b[$ on a

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\eta>0,\ (|x-y|<\eta)\Longrightarrow(|f(x)-f(y)|<\varepsilon).$$

(On distingera le cas où $M=0$ et $M>0$.)

Si $M=0$ *alors d'après* $I-a)$ *la fonction* f *est constante sur* $]a,b[$ *et le résultat est vérifié pour tout* x,y *dans* $]a,b[$.
On suppose, ici, que $M\neq 0$, *on a toujours d'après* $I-a)$, *pour tout* x,y *dans* $]a,b[$ *et pour tout* $\varepsilon>0$,

$$\Big(|x-y|<\eta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{M}\Big)\Longrightarrow\Big((|f(x)-f(y)|<M|x-y|<M\times\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon)\Big).$$

(d) Montrer que f est bornée sur $]a,b[$. (Indication: pour tout x_0 fixé dans $]a,b[$ on a $\forall x\in]a,b[,\quad ||f(x)|-|f(x_0)||\leq|f(x)-f(x_0)|$.)

Soit x_0 *un point arbitrairement fixé dans* $]a,b[$. *Pour tout* $x\in]a,b[$ *on a d'après* $I-a)$

$$||f(x)|-|f(x_0)||\leq|f(x)-f(x_0)|\leq M|x-x_0|\leq M(b-a).$$

On déduit de cette inégalité que pour tout $x\in]a,b[$

$$|f(x)|\leq|f(x_0)|+M(b-a),$$

donc f *est bornée dans* $]a,b[$.

(e) On suppose qu'il existe deux réels l_a et l_b tels que pour toutes suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ à valeurs dans $]a,b[$ l'on a :

$$(\lim_{n\to+\infty}a_n=a)\Longrightarrow(\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=l_a)\text{ et }(\lim_{n\to+\infty}b_n=b)\Longrightarrow(\lim_{n\to+\infty}f(b_n)=l_b).$$

Justifier que f est prolongeable par continuité sur tout le segment $[a,b]$.

D'après les hypothèses de cette question on a, quand $x\longrightarrow a$, $f(x)\longrightarrow l_a$ *(critère des limites par les suites) et quand* $x\longrightarrow b$, $f(x)\longrightarrow l_b$. *Donc* f *est prolongeable par continuité sur tout le segment* $[a,b]$ *et le prolongement* $\tilde{f}$ *prend les valeurs* $\tilde{f}(a)=l_a$; $\tilde{f}(b)=l_b$ *aux extrémitś et* $\tilde{f}(x)=f(x)$ *pour tout* $x\in]a,b[$.

(**Changer de copie**)

Exercice II (6 points)—

Soit $[a,b]$ $(a<b)$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$.

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe au moins un nombre l dans $[a,b]$ tel que $f(l)=l$, c'est à dire, que f admet un point fixe.

On pose g la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$ pour tout x dans $[a,b]$ qui est continue sur cet intervalle. Du fait que f est à valeurs dans $[a,b]$ on vérifie aisément que $g(a) \geq 0$ et que $g(b) \leq 0$. Si $g(a)g(b) = 0$, alors f admet a ou b comme point fixe. Si $g(a)g(b) \neq 0$ alors on a nécessairement $g(a)g(b) < 0$ et le le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'au moins un réel $l \in]a,b[$ qui annule g étant donné que celle-ci est continue sur $[a,b]$.
En conclusion: il existe au moins un nombre l dans $[a,b]$ tel que $f(l) = l$.

2. On suppose de plus, à partir de cette question, que f vérifie cette condition

$$\forall x \in [a,b], \forall y \in [a,b], \quad (x = y) \text{ ou } (|f(x) - f(y)| < |x - y|).$$

Montrer alors que le point fixe l de f est unique.

On montre l'unicité par l'absurde. On suppose que f admet deux points fixes distincts l_1 et l_2 dans $[a,b]$ tels que $f(l_1) = l_1$ et $f(l_2) = l_2$; alors d'après la condition vérifiée par f on a, comme $l_1 \neq l_2$, $|f(l_1) - f(l_2)| = |l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$ ce qui est absurde; d'où l'unicité.

3. Soit $x \in [a,b]$. Montrer que l'on a aussi $\dfrac{x + f(x)}{2} \in [a,b]$.

On a $x \in [a,b]$ et $f(x) \in [a,b]$ comme $[a,b]$ est un intervalle (fermé) de $\mathbb{R}$ il contient tout le segment d'extrémités x et $f(x)$, en particulier son milieu $\dfrac{x + f(x)}{2}$.

4. On introduit la suite $(u_n)_n$ pour tout $n \geq 0$ définie par

$$\begin{cases} u_0 & = \alpha \in [a,b] \\ u_{n+1} & = \dfrac{u_n + f(u_n)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(a) Justifier (en utilisant le résultat établi à la question (3.)) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a,b]$.

Par récurrence on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a,b]$.
Initialisation : pour le premier terme $u_0 = \alpha \in [a,b]$ d'après l'hopthèse, la propriété est donc vraie.
Héridité: on suppose que le terme u_n est bien définie dans $[a,b]$. $f(u_n)$ est aussi bien définie et appartient bien à l'intervalle $[a,b]$, donc d'après la question 3. $\dfrac{u_n + f(u_n)}{2} = u_{n+1} \in [a,b]$. Ce qui permet de conclure la propriété: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a,b]$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(u_{n+1} - u_n)$ est du même signe que $(u_n - u_{n-1})$. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est monotone (croissante ou décroissante).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - u_{n-1}) + (f(u_n) - f(u_{n-1}))}{2},$$

or d'après l'hypothèse de la question 2. on a $|f(u_n) - f(u_{n-1})| < |u_n - u_{n-1}|$. Ceci prouve que les nombres $(u_n - u_{n-1})$ et $(u_n - u_{n-1}) + (f(u_n) - f(u_{n-1}))$ sont de même signe et donc que le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $u_n - u_{n-1}$. On en déduit que la suite $(u_n)_n$ est bien monotone (croissante ou décroissante).

(c) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers l'unique point fixe l de f.

La suite $(u_n)_n$ est une suite monotone (donc croissante ou décroissante) de nombres réels tous dans un même segment $[a,b]$.Cette suite est donc à la fois majorée et minorée. Elle converge donc vers une limite l'. Comme f est continue, la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(l')$ et on a, par passage à la limite dans la relation de récurrence, $l' = (l' + f(l'))/2$, soit $f(l') = l'$. Ce qui prouve que le nombre l' est un point fixe de f. Comme f admet un unique point fixe l alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l' = l$.

(**Changer de copie**)

Exercice III (6 points)—

On définit la fonction f suivante sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x\sin(x)\sin(\frac{1}{x}).$$

1. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

   Sur $\mathbb{R}^*$ les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont continues donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. Enfin la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

2. En calculant la limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, montrer que f est prolongeable par continuité sur tout $\mathbb{R}$. On notera la fonction g son prolongement par continuité.

   Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$ on a $|\sin(x)\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$ donc $|f(x)| \leq |x|; \forall x \in \mathbb{R}^*$; d'après le théorème des gendarmes $|f(x)| \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$ ce qui est équivalent à dire que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. La fonction f est donc prolongeable par continuité à tout $\mathbb{R}$ et on peut définir son prolongement, qu'on note par g, la fonction définie par $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et par $g(0) = 0$.

3. Vérifier que g est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}^*$ et calculer le nombre dérivé $g'(x)$.

   Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$ les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables et leurs dérivées respectives sont $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$. Donc la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}^*$ $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et on a sa dérivée la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})$. Il en découle que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions dérivables et l'on a

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x}) + x\cos(x)\sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}\sin(x)\cos(\frac{1}{x}).$$

4. Montrer que la fonction g est aussi dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

   Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ on a

   $$\lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}.$$

   Or pour $h \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(h)| \leq |h||sin(h)|$ donc $|\frac{f(h)}{h}| \leq |sin(h)|$ ce qui prouve, en utilisant le théorème de comparaison des limites, que $\frac{f(h)}{h} \to 0$ quand $h \to 0$; Ceci *prouve que* $\lim_{h\to 0} \dfrac{g(h)-g(0)}{h}$ *existe et est finie, elle est égale à zéro et que le nombre dérivée* $g'(0) = 0$.

5. La fonction g' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Pour tout x *dans* $\mathbb{R}^*$ *la fonction* g' *est définie continue sur* $\mathbb{R}^*$ *comme somme de produit de fonctions continues. Pour* $x = 0$ *on montre que* g' *n'est pas continue en utilisant le critère des limites par les suites; En effet soit la suite* $(x_k)_k$ *définie par* $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$. *On a alors* $\cos(x_k) = \cos(2k\pi) = 1$, *et*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\sin(x_k)}{x_k} \times \cos(x_k) = 1$$

étant donné que $\lim_{k\to+\infty} x_k = 0$. *On a de plus* $|\sin(\frac{1}{x_k})| \leq 1$ *et* $|\cos(x_k)\sin(\frac{1}{x_k})| \leq 1$, *donc compte tenue de l'expression de* g *pour* $x \neq 0$ *la limite*

$$\lim_{k\to+\infty} g'(x_k) = -1.$$

On conclusion on a $\lim_{k\to+\infty} x_k = 0$ *et* $\lim_{k\to+\infty} g'(x_k) = -1 \neq g'(0)(=0)$ *la fonction* g' *n'est pas continue en* 0 *(elle n'est pas donc de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*).*

(**Changer de copie**)

Exercice IV (7 points)—

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ (en particulier en 0).

Pour tout $x < 0$ *la fonction* $x \mapsto \sqrt{-x}$ *est continue sur* $]-\infty, 0[$ *comme composée de fonctions continues. Pour tout* $x > 0$ *la fonction* $x \mapsto x\ln(x)$ *est continue sur* $]0, +\infty[$ *comme produit de fonctions continues.*
Continuité en $x = 0$*: on a*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{-x} = 0 = f(0) \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 = f(0).$$

Donc la fonction f *est continue aussi en* $x = 0$.

2. Etudier la dérivabilité de f pour tout réel non nul et calculer $f'(x)$ quand $x < 0$ et quand $x > 0$.

Pour tout $x < 0$ *la fonction* $x \mapsto \sqrt{-x}$ *est dérivable sur* $]-\infty, 0[$ *comme composée de fonctions dérivables et on a :*

$$\forall x < 0;\ f'(x) = ((-x)^{\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2}(-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{-x}}.$$

Pour tout $x > 0$ la fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivable et on a :

$$\forall x > 0;\ f'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

3. La fonction f est-elle dérivable en 0? On précisera l'allure de la tangente en $x = 0$.

   Quand $x \to 0^+$ avec $x > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

   Quand $x \to 0^-$ avec $x < 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty.$$

   La fonction f n'est pas drivable en 0. La limite du taux de variation étant $-\infty$ en 0 la courbe de f présente une tangente verticale au point de coordonnées $(0, 0)$.

4. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe (on tracera les tangentes remarquables).

   Pour $x < 0$, $f'(x) < 0$ donc la fonction est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$. Pour $x > 0$, $f'(x) = 0$ si et seulement si $\ln(x) = -1$ donc $x = e^{-1}$. Pour $x \in]0, e^{-1}[$, $f'(x) < 0$ donc la fonction est décroissante, pour $x > e^{-1}$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante. D'autre part

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{-x} = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} x\ln(x) = +\infty,$$

   et $f(e^{-1}) = e^{-1}\ln(e^{-1}) = -e^{-1}$. Il en découle le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$		0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Montrer que f est une bijection de $[e^{-1}, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$.

   La fonction f est continue et strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$ (car $\forall x \in]e^{-1}, +\infty[$, $f'(x) > 0$). Donc f est injective. D'autre part, du fait que f est continue alors l'image de l'intervalle $[e^{-1}, +\infty[$ par f est l'intervalle $f([e^{-1}, +\infty[) = [-e^{-1}, +\infty[$; la fonction est alors surjective. Donc elle est bijective de $[e^{-1}, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$.

6. Justifier que la fonction réciproque, qu'on note par f^{-1}, est dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$. Calculer $(f^{-1})'(0)$.

Sur l'intervalle ouvert $]e^{-1},+\infty[$ *la fonction* f *est dérivable et on a pour tout* x *dans* $]e^{-1},+\infty[$, $f'(x)\neq 0$ *donc la fonction réciproque* f^{-1} *est dérivable sur* $f(]e^{-1},+\infty[)=]-e^{-1},+\infty[$ *et on a*

$$\forall x\in]-e^{-1},+\infty[,\quad (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

En particulier pour $x=0$ $(\in]-e^{-1},+\infty[)$ *la fonction* f *est dérivable, de plus on a, d'une part,* $f(1)=0\Leftrightarrow f^{-1}(0)=1$ *et d'autre part, pour* $x>0$, $f'(x)=1+\ln(x)$, *ce qui donne que*

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{1+\ln(1)}=1.$$