Université de Technologie de Compiègne **MT90**

— FINAL A17 : DURÉE : 2 HEURES—

Date : 2 Novembre 2017

(**Changer de copie**)

Exercice I (8 points)— (Les questions I. et II. sont indépendantes.)

I– Soit la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On suppose que f est dérivable, en 0 et en 1, et que $f'(0) = f'(1) = 0$. On se propose de montrer que f admet un point fixe $\alpha \in]0,1[$.

1. Rappeler le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Soit la fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(x)-1}{x-1} & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

   Montrer que g est continue sur $[0,1]$.

3. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
4. En déduire que $f(\alpha) = \alpha$.

II– Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = xE(x - \dfrac{1}{x})$, où E désigne la fonction partie entière.

1. Soit $x > 0$, montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}$, dépendant de x, tel que

$$n \leq \frac{1}{x} < n + 1$$

   En déduire que $(x \to 0^+) \Longleftrightarrow (n \to +\infty)$.

2. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, on a $-n - 1 \leq E(x - \frac{1}{x}) \leq -n$ (on pourrait chercher un encadrement de $x - \frac{1}{x}$ en fonction de n).
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} -xE(x - \frac{1}{x}) = 1$.
4. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

(**Changer de copie**)

Exercice II (5 points)—

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, avec $f(a) = f(b) = 0$, telles que f soit dérivable sur $]a,b[$ et que <u>la fonction f' est strictement décroissante</u>.

1. Enoncer le théorème de Rolle. En déduire l'existence de $c \in]a,b[;\ f'(c) = 0$.

2. Montrer que si $t \in]a,c[$ alors $f'(t) > 0$ et que si $t \in]c,b[$ alors $f'(t) < 0$.

3. Montrer que f est strictement croissante sur $[a,c]$ et strictement décroissante sur $[c,b]$. (On pourrait utiliser le théorème des accroissements finis).

4. En déduire que f admet un maximum global en $x = c$.

5. Montrer que pour tout $x \in [a,b], f(x) \geq 0$.

(**Changer de copie**)

Exercice III (11 points)— Soit la fonction f définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x)} & \text{si } \ x \in D\backslash\{0\} \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

Soit la suite (u_n) telle que $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\ln(u_n)}$.

(*On rappelle, qu'une fonction définie sur $[a,b[$, est dérivable en a si elle est dérivable à droite en a.*
On rappelle que $e \approx 2.72$ et que $e^{-1} \approx 0.37$).

I- **Etude de la fonction f**

1. Donner le domaine de définition D de f.
2. La fonction f est-elle continue en 0 ? Dérivable en 0?
3. Justifier que f est de classe C^1 sur $[0,1[$.
4. Dresser le tableau de variations de f. On y fera apparaître les différentes limites et la valeur $f(e)$.

II- **Etude de la suite (u_n)**

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geq e$. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
2. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que $\forall x \geq e, \ 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.
4. Enoncer le théorème des accroissements finis.
5. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}$.
6. Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_0 à partir duquel u_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

III- **Etude de la réciproque de f sur $[0,1[$**

1. Justifier que la fonction f, restreinte à $[0,1[$, est injective.
2. En déduire que la fonction f, restreinte à $[0,1[$, admet une fonction réciproque f^{-1} dont on précisera le domaine de définition $D_{f^{-1}}$.
3. La fonction f^{-1} est-elle continue sur son domaine de définition $D_{f^{-1}}$?
4. Dans quel domaine la fonction f^{-1} est-elle dérivable? Calculer $f(e^{-1})$, en déduire $(f^{-1})'(-e^{-1})$.