Université de Technologie de Compiègne **MT90**

— FINAL P17 : DURÉE : 2 HEURES—

Date : 5 Mai 2017

(**Changer de copie**)

Exercice I (6 points)— (Les questions I. et II. sont indépendantes.)

I- (a) **Question de cours.** Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). Enoncer le théorème de Rolle pour une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable en tout point de I et s'annulant en trois points distincts $\alpha < \beta < \gamma$ de I. Montrer que la fonction dérivée seconde (notée f'') s'annule au mois une fois dans I.

II- (a) **Question de cours.** Enoncer le théorème des accroissements finis.

(b) Soient deux réels a et b (avec $a < b$) et soit f une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ telle que f' soit bornée. (C'est à dire il existe un réel $M \geq 0$ telle que $\sup\limits_{t\in]a,b[} |f'(t)| = M$).

Montrer que pour tout x, y dans $]a, b[$ on a $|f(x) - f(y)| < M|x - y|$.

(c) Déduire que pour tout x, y dans $]a, b[$ on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ (|x - y| < \eta) \Longrightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

(On distingera le cas où $M = 0$ et $M > 0$.)

(d) Montrer que f est bornée sur $]a, b[$. (Indication: pour tout x_0 fixé dans $]a, b[$ on a $\forall x \in]a, b[,\quad ||f(x)| - |f(x_0)|| < |f(x) - f(x_0)|$.)

(e) On suppose qu'il existe deux réels l_a et l_b tels que pour toutes suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ à valeurs dans $]a, b[$ l'on a :

$$(\lim_{n\to+\infty} a_n = a) \Longrightarrow (\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l_a) \text{ et } (\lim_{n\to+\infty} b_n = b) \Longrightarrow (\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = l_b).$$

Justifier que f est prolongeable par continuité sur tout le segment $[a, b]$.

(**Changer de copie**)

Exercice II (6 points)—

Soit $[a, b]$ ($a < b$) un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$.

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe au moins un nombre l dans $[a, b]$ tel que $f(l) = l$, c'est à dire, que f admet un point fixe.

2. On suppose de plus, à partir de cette question, que f vérifie cette condition

$$\forall x \in [a, b], \forall y \in [a, b], \quad (x = y) \text{ ou } (|f(x) - f(y)| < |x - y|).$$

Montrer alors que le point fixe l de f est unique.

3. Soit $x \in [a,b]$. Montrer que l'on a aussi $\dfrac{x+f(x)}{2} \in [a,b]$.
4. On introduit la suite $(u_n)_n$ pour tout $n \geq 0$ définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & \alpha \in [a,b] \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + f(u_n)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   (a) Justifier (en utilisant le résultat établi à la question (3.)) que pour tout $n \geq 0,\ u_n \in [a,b]$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(u_{n+1} - u_n)$ est du même signe que $(u_n - u_{n-1})$. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est monotone (croissante ou décroissante).
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers l'unique point fixe l de f.

(**Changer de copie**)

Exercice III (6 points)—

On définit la fonction f suivante sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x\sin(x)\sin(\frac{1}{x}).$$

1. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. En calculant la limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, montrer que f est prolongeable par continuité sur tout $\mathbb{R}$. On notera la fonction g son prolongement par continuité.
3. Vérifier que g est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}^*$ et calculer le nombre dérivé $g'(x)$.
4. Montrer que la fonction g est aussi dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.
5. La fonction g est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

(**Changer de copie**)

Exercice IV (7 points)—

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ (en particulier en 0).
2. Etudier la dérivabilité de f pour tout réel non nul et calculer $f'(x)$ quand $x < 0$ et quand $x > 0$.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0? On précisera l'allure de la tangente en $x = 0$.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe (on tracera les tangentes remarquables).
5. Montrer que f est une bijection de $[e^{-1}, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$.
6. Justifier que la fonction réciproque, qu'on note par f^{-1}, est dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$. Calculer $(f^{-1})'(0)$.