Final MT02 - P2022
Durée : 2h

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 - (Barème approximatif : 7 points - Temps de composition : 35 min)

1. Soit $f_1(x) = 2\cos x + \sin(3x)$ et $f_2(x) = \dfrac{x-2x^2}{1+x+3x^2}$.
   (a) Déterminer le développement limité de f_1 au voisinage de 0 à l'ordre 3.
   (b) A l'aide d'une division selon les puissances croissantes, déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f_2.
   (c) En déduire que le développement limité de $g = f_1 \circ f_2$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 est
   $$g(x) = 2 + 3x - 10x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3).$$
   (d) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Sans calculs supplémentaires, indiquer pour quelle valeur de α la fonction h définie par $h(x) = g(x) - \alpha x$ admet-elle un extremum local en $a = 0$? Préciser sa nature.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = (x-1)g(\frac{1}{x})$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
   (a) Déterminer le développement limité de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ sous la forme
   $$f(x) = 2x + a + \frac{b}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$
   où les valeurs de $a \neq 0$ et $b \neq 0$ sont à préciser.
   (b) i. Donner l'équation de la droite asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
   ii. Indiquer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 2 - $\big($Barème approximatif : $(5\,,10)$ points - Temps de composition : (25 min, 1h) $\big)$

Partie I - Suite de fonctions et intégrales

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+(n-x)^2}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$. Montrer que $u_n = f_n(\frac{n}{2})$.
2. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $D = \mathbb{R}$ vers la fonction identiquement nulle.
3. À l'aide d'un changement de variable, montrer que la forme générale des primitives de f_n est
   $$\tfrac{1}{n}\mathrm{Arctan}(\tfrac{2x}{n} - 1) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$
   (Mettre sous forme canonique la forme développée de $x^2 + (n-x)^2 = 2x^2 - 2nx + n^2$.)
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Vous pouvez admettre les résultats de la partie I pour répondre à certaines questions de la partie II.

Partie II - Équation différentielle linéaire du 1er ordre

1. À l'aide d'une intégration par partie, calculer

$$G_1(x) = \int_2^x t\, e^{\frac{t}{2}}\, dt.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{t-1}{t^2-4t+8}$

   (a) Déterminer deux nombres réels α et β tels que

$$g(t) = \alpha \frac{u'(t)}{u(t)} + \beta f_4(t)$$

   où $u(t) = t^2 - 4t + 8$ et f_4 est la fonction définie au **I.** pour $n = 4$.

   (b) En déduire $G_2(x) = \displaystyle\int_2^x g(t)\, dt$.

   (c) Effectuer la division selon les puissances croissantes de $A(x) = x^4 - 2x^2 + 16$ par $B(x) = x^2 - 4x + 8$ avec un reste de valuation 3.

   (d) En déduire que

$$\frac{A(x)}{x^3 B(x)} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + g(x).$$

3. Soit I un intervalle. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad xy' - 2y = \frac{x^4 - 2x^2 + 16}{x^2 - 4x + 8} + x^4 e^{\frac{x}{2}}, \quad \text{avec } x \in I.$$

   (a) Dans cette question, on suppose que $I =]0, +\infty[$.

      i. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E).

      ii. À l'aide de la variation de la constante, déterminer une solution particulère de (E). *(Indication : utiliser les questions* **1.** *et* **2.***)*

      iii. En déduire que l'unique solution de (E) satisfaisant $y(2) = 1$ est

$$y_*(x) = x^2 - x - 1 + x^2(G_1(x) + G_2(x)).$$

      iv. Justifier que y_* est prolongeable par continuité en 0.

   (b) Le système

$$\begin{cases} xy' - 2y = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 16}{x^2 - 4x + 8} + x^4 e^{\frac{x}{2}}, \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

   admet-il une et une seule solution définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$?