Final MT02 - P2023
Durée : 2h

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 - (Barème approximatif : 8 points - Temps de composition : 50 min)

1. Soit G la fonction définie sur $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\tan t}{2 + \cos^2 t}\, dt$.

   (a) Déterminer deux nombres réels α et β tels que

$$\frac{1}{u(2+u^2)} = \alpha \times \frac{1}{u} + \beta \times \frac{u}{2+u^2}.$$

   Correction : On met le membre de droite au même dénominateur

$$\frac{1}{u(2+u^2)} = \frac{\alpha(2+u^2) + \beta u^2}{u(2+u^2)} = \frac{(\alpha+\beta)u^2 + 2\alpha}{u(2+u^2)}$$

   On a donc $1 = (\alpha+\beta)u^2 + 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\alpha = -\frac{1}{2}$.

   (b) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{u(2+u^2)} du = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{3x^2}{2+x^2}\right)$.

   Correction : On utilise la décomposition précédente pour déterminer une primitive de $\frac{1}{u(2+u^2)}$:

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{u(2+u^2)}\, du = \int_1^x \frac{1}{2u} - \frac{1}{2\times 2} \times \frac{2\times u}{(2+u^2)}\, du &= \left[\frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{4}\ln(2+u^2)\right]_1^x \\ &= \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(2+x^2) + \frac{1}{4}\ln 3 \\ &= \frac{1}{4}\ln x^2 - \frac{1}{4}\ln(2+x^2) + \frac{1}{4}\ln 3 \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3x^2}{2+x^2}\right).\end{aligned}$$

   (c) À l'aide du changement de variable $u = \cos t$, montrer que $G(x) = -\displaystyle\int_1^{\cos x} \frac{1}{u(2+u^2)}\, du$. Puis, donner l'expressions algébrique de $G(x)$.

   Correction : On pose $u = \cos t$ dans la définition de $G(x)$. Les nouvelles bornes sont

$$t = x \Leftrightarrow u = \cos x$$

$$t = 0 \Leftrightarrow u = \cos 0 = 1$$

On a $\frac{du}{dt} = -\sin t \Rightarrow du = -\sin t\, dt$, donc on peut réécrire l'intégrand comme suit

$$\frac{\tan t}{2+\cos^2 t}\,dt = \frac{\sin t}{\cos t(2+\cos^2 t)}dt = -\frac{1}{u(2+u^2)}du.$$

D'où l'égalité

$$\int_0^x \frac{\tan t}{2+\cos^2 t}\,dt = -\int_1^{\cos x} \frac{1}{u(2+u^2)}\,du = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3\cos^2 x}{(2+\cos^2 x)}\right).$$

2. On se propose de déterminer une primitive F de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{(1-x)^2}{x^3(1+x^2)}$.
   (a) Effectuer la division selon les puissances croissantes de $A(x) = (1-x)^2$ par $B(x) = 1+x^2$ avec un reste de valuation 3.
   Correction : On trouve le quotient $Q(x) = 1-2x$ et le reste $R(x) = 2x^3$
   (b) En déduire qu'une expression algébrique de F est

$$F(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x} + 2\mathrm{Arctan}\, x.$$

   Correction : On a

$$f(x) = \frac{A(x)}{x^3B(x)} = \frac{B(x)\times Q(x)+R(x)}{x^3B(x)} = \frac{Q(x)}{x^3} + \frac{2}{B(x)}$$

$$f(x) = \frac{1-2x}{x^3} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + 2\times\frac{1}{1+x^2}$$

   D'où une primitve de f s'écrit

$$F(x) = \int \frac{1}{x^3}\,dx - 2\int\frac{1}{x^2} + 2\int\frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x} + 2\mathrm{Arctan}\, x.$$

3. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad (2+\cos^2 x)y' + 4\tan(x)y = f(x+1)\cos^2 x, \quad \text{avec } x \in I.$$

   (a) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E).
   Correction : Pour $x \in I$, on peut écrire

$$y' = -4\frac{\tan x}{(2+\cos^2 x)}y + f(x+1)\frac{\cos^2 x}{2+\cos^2 x}.$$

   Avec les notations, du cours, le coefficient a est défini par $a(x) = -4\frac{\tan x}{(2+\cos^2 x)}$ donc une primitive est $A(x) = -4G(x) = \ln\left(\frac{3\cos^2 x}{(2+\cos^2 x)}\right)$. La forme générale des solutions de l'équation homogène est

$$y_h(x) = Ce^{A(x)} = \frac{3C\cos^2 x}{(2+\cos^2 x)}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ choisi arbitrairemnt.}$$

   On peut inclure le facteur 3 dans la constante C et considérer la forme $y_h(x) = \frac{C\cos^2 x}{(2+\cos^2 x)}$

(b) À l'aide de la variation de la constante, montrer qu'une solution particulière de (E) est *(Indication : utiliser les questions* **1.** *et* **2.***)*

$$\frac{\cos^2 x}{2+\cos^2 x} \times F(x+1).$$

Correction : On pose $y_p(x) = \varphi(x) \times \frac{\cos^2 x}{(2+\cos^2 x)}$.

$$y_p'(x) = \varphi'(x) \times \frac{\cos^2 x}{(2+\cos^2 x)} + \varphi(x) \times \left(-\frac{4\sin(x)\cos(x)}{(2+\cos^2 x)^2}\right).$$

On obtient donc

$$\varphi'(x) \times \frac{\cos^2 x}{(2+\cos^2 x)} \cancel{-\varphi(x) \times \frac{4\sin(x)\cos(x)}{(2+\cos^2 x)^2}} = \cancel{-\frac{4\tan(x)}{2+\cos^2 x} \times \varphi(x) \times \frac{\cos^2 x}{(2+\cos^2 x)}} + f(x+1)\frac{\cos^2 x}{2+\cos^2 x}$$

On trouve tout d'abord

$$\varphi'(x) = f(x+1)$$

dont une primitive est $\varphi(x) = F(x+1)$. Une solution particulière de (E) est

$$y_p(x) = \frac{\cos^2 x}{(2+\cos^2 x)} \times F(x+1)$$

(c) En déduire l'unique solution de (E) satisfaisant $y(0) = 0$.

Correction : Le principe de superposition des solutions nous donne la forme générale suivante des solutions de l'équation (E)

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{\cos^2 x}{(2+\cos^2 x)} \times \big(C + F(x+1)\big)$$

La condition $y(0) = 0$ entraîne

$$C + F(1) = 0 \Leftrightarrow C = -F(1) = -\left(-\frac{1}{2} + 2 + 2\text{Arctan}(1)\right) = -\left(\frac{3}{2} + 2 \times \frac{\pi}{4}\right).$$

L'unique solution est définie par

$$y(x) = \frac{\cos^2 x}{(2+\cos^2 x)} \times \left(F(x+1) - \frac{3+\pi}{2}\right)$$

Exercice 2 - (Barème approximatif : 7 points - Temps de composition : 35 min)

On définit deux applications sur $[-1, +\infty[$ par $f_1(x) = 4\sqrt{1+x} - 3e^x$ et $f_2(y) = \dfrac{2+y}{2-y}$.

1. Déterminer le développement limité de f_1 au voisinage de 0 à l'ordre 3.

Correction : Il existe une fonction ε_1 telle que

$$\forall x \geq 1, \quad f_1(x) = 4\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\right)-3\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+x^3\varepsilon_1(x), \text{ avec } \varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

$$\Rightarrow f_1(x) = 1 - x - 2x^2 - \frac{x^3}{4} + x^3\varepsilon_1(x)$$

2. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_1(x) - 1 + x + 2x^2}{x - \sin x} = -\frac{3}{2}$.
   Correction : Il s'agit d'un quotient d'infiniment petit au voisinage de 0, on doit utiliser les parties principales des DLs du numérateur et du dénminateur pour calculer la limite :

$$f_1(x) - 1 + x + 2x^2 = -\frac{x^3}{4} + x^3\varepsilon_1(x)$$

   et la partie principale de $x - \sin x$ est $\dfrac{x^3}{6}$. On obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x) - 1 + x + 2x^2}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{4}}{\frac{x^3}{6}} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

3. Déterminer le développement limité de f_2 au voisinage de 1 à l'ordre 3. (*Indication : effectuer le changement de variable $y = 1 + h$.)*
   Correction : Avec le changement de variable indiqué, on a $f_2(1+h) = \frac{3+h}{1-h} = (2+h) \times \frac{1}{1-h}$.
   On effectue le produit de $(2+h)$ avec le DL usuel au voisinage de 0 de $\frac{1}{1-h}$

$$f_2(1+h) = (3+h)\big(1 + h + h^2 + h^3\big) + h^3\varepsilon_2(h) = 3 + 4h + 4h^2 + 4h^3 + h^3\varepsilon_3(h).$$

4. En déduire que le développement limité de $g = f_2 \circ f_1$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 est

$$g(x) = 3 - 4x - 4x^2 + 11x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

   Correction : On pose $h = -x - 2x^2 - \frac{x^3}{4}$ dans le DL précédent :

$$\begin{aligned} g(x) &= 3 + 4\left(-x-2x^2-\frac{x^3}{4}\right) + 4\left(-x-2x^2-\frac{x^3}{4}\right)^2 + 4\left(-x-2x^2-\frac{x^3}{4}\right)^3 + x^3\varepsilon_3(x) \\ &= 3 - 4x - 8x^2 - x^3 + 4x^2 + 16x^3 - 4x^3 + x^3\varepsilon_3(x) \\ &= 3 - 4x - 4x^2 + 11x^3 + x^3\varepsilon_3(x). \end{aligned}$$

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = (2x-1)g(\frac{1}{2x})$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
   (a) Déterminer le développement limité de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ sous la forme

$$f(x) = 6x + a + \frac{b}{x^2} + \frac{1}{x^2}\widetilde{\varepsilon}\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{avec } \widetilde{\varepsilon}(t) \underset{t\to 0}{\to} 0,$$

   où les valeurs de $a \neq 0$ et $b \neq 0$ sont à préciser.

Correction : On a

$$\begin{aligned}
f(x) &= (2x-1)\left(3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{11}{8x^3}\right) + \frac{1}{x^2}\varepsilon_4\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= 6x - 4 - 3 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x} + \frac{11}{4x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_5\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= 6x - 7 + \frac{15}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_5\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

(b) i. Donner l'équation de la droite asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Correction : L'équation de la droite asymptote à à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$ est $y = 6x - 7$.

ii. Indiquer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.

Correction : Puisqu'au voisinage de $\pm\infty$, on a

$$f(x) - [6x-7] = +\frac{15}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_5\left(\frac{1}{x}\right) > 0,$$

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de son asymptote.

Exercice 3 - (Barème approximatif : 5 points - Temps de composition : 30 min)

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $D = [0, +\infty[$ par $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$.

1. Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle.

   Correction : • Pour $x = 0$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n(0) = 0$. La suite $(f_n(0))$ est constante égale à 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

   • Pour $x \in\,]0, +\infty[$, par croissance comparée polynôme/exponentielle, on a

   $$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^2 \times ne^{-nx} = \lim_{n\to+\infty} x^2 \times \frac{n}{e^{nx}} = 0.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \max\limits_{x\in D} |f_n(x)|$. Montrer que $u_n = f_n(\frac{2}{n})$.

   Correction : On calcule $u_n = \max\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$:

   $$f_n'(x) = ne^{-nx}(2x - nx^2) = ne^{-nx} \times x(2-nx).$$

x	0		$\frac{2}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$u_n = \frac{4}{ne^2}$	$\searrow$	0

3. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur D vers la fonction identiquement nulle.

   Correction : On a $u_n = \dfrac{4}{ne^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction identiquement nulle sur $D = [0, +\infty[$.

4. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$. Sans calculer I_n, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

   Correction : On utilise le théorème des gendarmes :

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq u_n \quad &\Rightarrow \quad \forall\, x \in [0,1],\ -u_n \leq f_n(x) \leq u_n \\
&\Rightarrow \quad \int_0^1 -u_n\,dt \leq \int_0^1 f_n(t)\,dt \leq \int_0^1 u_n\,dt \\
&\Rightarrow \quad -u_n \leq \int_a^b f_n(t)\,dt \leq u_n
\end{aligned}$$

   Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

5. À l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties, montrer que

$$n^2 I_n = 2 - (n^2 + 2n + 2)e^{-n}.$$

   Correction :

$$\begin{aligned}
n^2 I_n = \int_0^1 n^3 x^2 e^{-nx} dx &= \Big[-n^2x^2e^{-nx}\Big]_0^1 + n^2\int_0^1 2xe^{-nx}dx \\
&= -n^2e^{-n} + \Big[-2nxe^{-nx}\Big]_0^1 + \int_0^1 2ne^{-nx}dx \\
&= -n^2e^{-n} - 2ne^{-n} + \Big[-2e^{-nx}\Big]_0^1 \\
&= -n^2e^{-n} - 2ne^{-n} - 2e^{-n} + 2.
\end{aligned}$$

6. A l'aide des règles de Riemann, en déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} I_n$ est une série convergente *(Indication : proposer une suite équivalente à* $(I_n)_{n\geq 0}$ *.)*

   Correction : D'après l'échelle de comparaison exponentielle/polynôme au voisinage de $+\infty$, on sait que

$$(n^2 + 2n + 2)e^{-n} = \frac{(n^2 + 2n + 2)}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

   Par conséquent, $n^2 I_n \underset{n\to+\infty}{\to} 2$ et I_n est équivalent à $\frac{2}{n^2}$. D'après la règle de Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} I_n$ est une série convergente.