Final MT02 - P2024
Durée : 2h

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 - (Barème approximatif : 8 points - Temps de composition : 45min)

1. (a) Déterminer la forme générale des primitives de g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{1}{t^2 - 2t + 5}$.

   (b) On pose $u(t) = t^2 - 2t + 5$. Déterminer deux nombres réels α et β tels que
$$\frac{(t+2)^2}{t^2 - 2t + 5} = 1 + \alpha \frac{u'(t)}{u(t)} + \beta g(t).$$

   (c) En déduire $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{(t+2)^2}{t^2 - 2t + 5}\, dt$.

2. On considère l'équation différentielle suivante
$$(E) \qquad (x+2)y' + 3y = \frac{4}{x^2 - 2x + 5}, \quad \text{avec } x \in \ I =]-2, +\infty[.$$

   (a) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E).

   (b) À l'aide de la variation de la constante, déterminer une solution particulière de (E).

   (c) En déduire l'unique solution de (E) satisfaisant $y(1) = -\frac{2}{3}$. Préciser la valeur de $y'(1)$.

   (d) On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = 1 + \displaystyle\int_1^x y(t)\, dt$. À l'aide d'une intégration par partie, compléter les pointillés
$$f(x) = \frac{9 - 2G(x)}{(x+2)^2} + \quad \cdots$$

   (e) Déterminer le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de $a = 1$.

   (f) En déduire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 1$ ainsi que sa position relative par rapport à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 2 - (Barème approximatif : 5 points - Temps de composition : 30 min)

Soit $f_1(x) = \sqrt{4-3x^2}$ définie pour $x \in [-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}]$ et $f_2(x) = \dfrac{1-3x}{1-x+x^2}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$.

1. A l'aide d'une division selon les puissances croissantes, déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f_2.
2. À l'aide du changement de variable $x = 1+h$, montrer que le développement limité de f_1 au voisinage de 1 à l'ordre 2 est
$$f_1(1+h) = 1 - 3h - 6h^2 + h^2\varepsilon(h), \text{avec } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0.$$
3. En déduire que le développement limité de la composée $f_1 \circ f_2$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 est
$$f_1 \circ f_2(x) = 1 + 6x - 15x^2 + x^2\tilde{\varepsilon}(x), \text{ avec } \tilde{\varepsilon}(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Indiquer pour quelle valeur de α la fonction g définie au voisinage de 0 par $g(x) = f_1 \circ f_2(x) - \ln(1+\alpha x)$ admet-elle un extremum local en $a = 0$? Préciser sa nature.

Exercice 3 - $\big($Barème approximatif : 7 points - Temps de composition : 45 min $\big)$

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $D = [0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{x^{n+1} - x + n}$.

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(x)dx \quad$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{1}{k}} f_k(x)dx$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$, on pose $u_n = \max\limits_{x\in D} |f_n(x)|$. Montrer que $u_n = f_n(1)$.
2. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur D vers la fonction identiquement nulle.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
4. (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1],\ f_n(x) \geq \dfrac{x}{n}$.
   (b) En déduire que la série $(S_n)_{n\geq 1}$ diverge.
5. (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq 0,\ f_n(x) \leq \dfrac{x}{n-x}$.
   (b) Montrer que $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{x}{n-x}dx = -n\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n}$.
   (Indication : écrire $\frac{x}{n-x} = \frac{n}{n-x} - 1$.*)*
   (c) À l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\ln(1-x)$, déterminer un équivalent de J_n sous la forme $\dfrac{A}{n^\alpha}$ où $A \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$.
   (d) En déduire que la série $(S'_n)_{n\geq 1}$ converge.