MT02 - Médian (1h30 min) - P2022

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Rappel : pour un total de 20 points, choisir de traiter
- soit l'exercice 1 - parties I, II et III ;
- soit l'exercice 1 - parties I et II - et l'exercice 2.

Exercice 1 (Barème approximatif : (7,6,7) points)

On considère la fonction définie et continue sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{2-3x+2x^2}$.

Dans tout l'exercice (u_n) est la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1}=f(u_n). \end{cases}$

Partie I - Etude d'une suite récurrente

1. (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=x$.

   Correction :

$$\sqrt{2-3x+2x^2}=x \Leftrightarrow 2-3x+2x^2=x^2 \text{ et } x\geq 0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \text{ et } x\geq 0 \Rightarrow x=1 \text{ ou } x=2.$$

   La fonction f admet donc deux points fixes :$\{1,2\}$.

   (b) Justifier que $f(x)-x$ est du même signe que x^2-3x+2.
   Dresser le tableau de signe de $f(x)-x$ sur $[0,+\infty[$.

   Correction : On utilise la méthode du conjugué

$$\sqrt{2-3x+2x^2}-x=(\sqrt{2-3x+2x^2}-x)\times\frac{(\sqrt{2-3x+2x^2}+x)}{\sqrt{2-3x+2x^2}+x}=\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-3x+2x^2}+x}$$

   Le dénominateur étant positif sur $[0,+\infty[$, la quantité $f(x)-x$ est bien du même signe que x^2-3x+2.

x	0		1		2		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Que peut-on dire de (u_n) si u_0 est un point fixe de f ?

   Correction : Les suites sont constantes (donc convergentes) : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0$.
   Cela se justifie par récurrence. L'initialisation est évidemment vraie.

   Hérédité : $u_n=u_0 \quad\Rightarrow\quad u_{n+1}=f(u_n)=f(u_0)=u_0.$

3. On suppose dans cette question que $u_0\in\,]1,2[$.

(a) Montrer par récurrence sur n que $\forall n \geq 0,\ u_n \in]1,2[$.
(Indication : observer que $2x^2 - 3x + 2 = 2(x-1)^2 + x$.)
Correction : L'initialisation à $n = 0$ est donnée par l'énoncé.

Hérédité : $u_n \in]1,2[\Rightarrow 0 < 2(u_n - 1)^2 < 2 \Rightarrow 1 < 2(u_n-1)^2 + u_n < 4 \Rightarrow \sqrt{1} < \underbrace{\sqrt{2(u_n-1)^2+u_n}}_{=f(u_n)} < \sqrt{4}$

$\Rightarrow 1 < u_{n+1} < 2$

(b) Préciser la monotonie de (u_n).
Correction : Il s'agit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$: d'après le tableau de signe de $f(x) - x$ on en déduit que

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$$

donc (u_n) est strictement décroissante.

(c) Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ à préciser.
Correction : La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers l'un des points fixes de f. Comme on doit avoir $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \ell$, la limite est $\ell = 1$.

4. On suppose dans cette question que $u_0 > 2$.

(a) Préciser la monotonie de (u_n).
Correction : Tout d'abord, le raisonnement effectué à la question **I-3a)** permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$. Ensuite, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$: d'après le tableau de signe de $f(x) - x$ on en déduit que

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$$

donc (u_n) est strictement croissante.

(b) Montrer par l'absurde que (u_n) diverge.
Correction : On suppose que (u_n) converge vers une limite ℓ qui est nécessairement un point fixe de f. Comme la suite (u_n) est croissante, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell$ et en particulier $u_0 \leq \ell$. D'après la question **I-1a)** on sait que $\ell \leq 2$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse sur $u_0 > 2$.
<u>Conclusion :</u> (u_n) diverge.

(c) Montrer par l'absurde que (u_n) tend vers $+\infty$.
Correction : Supposons que (u_n) ne tend pas vers $+\infty$. Cela signifie que (u_n) est majorée. Comme (u_n) est croissante, cela impleque que (u_n) converge. Ceci est impossible car (u_n) diverge.
<u>Conclusion :</u> (u_n) tend vers $+\infty$.

Partie II - Étude d'un ensemble

On admet que la fonction g définie sur $]2,+\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est strictement croissante.
Pour $u_0 > 2$ fixé, on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on définit l'ensemble $A := \{w_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$.

1. Calculer $\ell' = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Correction : Pour $x \geq 0$,

$$\frac{\sqrt{2-3x+2x^2}}{x} = \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} + 2} \underset{x\to+\infty}{\to} \sqrt{2}.$$

2. Justifier que $\operatorname{Im} g$ est un intervalle ouvert, puis déterminer $\operatorname{Im} g$.
   Correction : La fonction g étant continue et strictement croissante, $\operatorname{Im} g$ est un intervalle. Puisque $g(2) = 1$, on a $\operatorname{Im} g =]1, \sqrt{2}[$.
3. Déduire de $\mathbf{I-4}$) que (w_n) converge vers ℓ'.
   Correction : Il faut remarquer que $w_n = g(u_n)$. Par composition de limites, on a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \sqrt{2} \Rightarrow \quad w_n \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{2}.$$

4. Justifier que (w_n) est strictement croissante.
   Correction : D'après $\mathbf{I-4}$), on sait que (u_n) est strictement croissante. Comme g est strictement croissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ g(u_n) < g(u_{n+1})$$

   Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n < w_{n+1}$.
5. En déduire que A admet-il un plus petit élément $q = \min A$ à préciser et que $q > 1$.
   Correction : On peut alors ordonner les termes de la suite (w_n) ainsi

$$w_0 < w_1 < \cdot < w_n < \cdots \leq \ell'.$$

   L'ensemble A admet un plus petit élément $q = w_0 = g(u_0)$. Comme $\operatorname{Im} g =]1, \sqrt{2}[$, on en déduit que $q > 1$.
6. Démontrer que $\sup A = \ell'$.
   Correction : La limite ℓ' satisfait la caractérisation de la borne supérieure : on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow \ell' - \varepsilon < w_n < \ell' + \varepsilon)$$

   On applique la définition de la limite à $\varepsilon = \ell' - t > 0$ et on prend $n = N+1$

$$\forall t < \ell', \exists n = N+1 \in \mathbb{N},\ u_n > t.$$

7. L'ensemble A admet-il un plus grand élément ?
   Correction : Par contre ℓ' n'est pas le plus grand élément de A car $\ell' \notin A$. Pour le justifier, on peut
   • soit résoudre l'équation $w_n = \ell'$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell' \Leftrightarrow f(u_n) = \sqrt{2}u_n \Leftrightarrow 2 - 3u_n = 0 \Leftrightarrow u_n = \frac{2}{3}.$$

   Impossible car le plus petit élément est $u_0 > 2$;
   • soit utiliser la stricte monotonie :

$$\forall M = w_n \in A, \exists x = w_{n+1} \in A,\ M < x.$$

   La négation de « A admet un plus grand élément » est vraie.

Partie III - Etude de séries numériques

1. Compléter la proposition suivante par l'un des symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

$$\forall (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \left(\sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge} \quad \ldots \quad \sum_{n\geq 0} |v_n| \text{ converge} \right).$$

Correction :

$$\forall (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \left(\sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge} \quad \Leftarrow \quad \sum_{n\geq 0} |v_n| \text{ converge} \right).$$

2. (a) A l'aide des règles de Riemann, justifier que la série définie par $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{f(k)}$ diverge.

Correction : D'après **II-1)**, on sait que $\frac{n}{f(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$. Cela signifie que $\frac{1}{f(n)} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n\sqrt{2}}$ donc la série diverge.

(b) Montrer que la série définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{f(k)}$ converge.

(Indication : montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et utiliser la monotonie de f.)

Correction : De l'écriture $f(x) = \sqrt{2(x-1)^2 + x}$, on en déduit que f est croissante sur $[1, +\infty[$.

- (S_{2n}) est décroissante :

$$f(2n+1) \leq f(2n+2) \Rightarrow \quad S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{f(2n+2)} - \frac{1}{f(2n+1)} \leq 0$$

- (S_{2n+1}) est croissante :

$$f(2n+2) \leq f(2n+3) \Rightarrow \quad S_{2n+3} - S_{2n+2} = -\frac{1}{f(2n+3)} + \frac{1}{f(2n+1)} \geq 0$$

- Enfin,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{f(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite $S \in \mathbb{R}$. La suite (S_n) converge donc vers S également.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$ où (u_n) est la suite récurrente de premier terme $u_0 > 2$..

(a) Montrer par récurrence sur n que $\forall\, n \geq 0,\ u_n \geq q^n u_0$, où q est défini à la question **II-5)**.

Correction : On définit $P(n) :=$« $u_n \geq q^n u_0$ ».

Initialisation à $n = 0$. $u_0 = q^0 u_0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. On suppose $P(n)$ vraie.

$$w_n \geq q \Rightarrow u_{n+1} \geq q u_n \geq q \times q^n u_0 = q^{n+1} u_0.$$

Alors $P(n+1)$ vraie. L'hérédité est vérifiée.

(b) En déduire que $\forall n \geq 0, T_n \leq \frac{q}{(q-1)u_0}$. *(Indication : étudier la série géométrique de terme général* $\frac{1}{u_0}(\frac{1}{q})^n$*.)*

Correction : On en déduit que

$$T_n \leq \frac{1}{u_0} + \frac{1}{qu_0} + \cdots + \frac{1}{q^n u_0} = \frac{1}{u_0} \times \frac{1-q^{-n-1}}{1-q^{-1}} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{u_0} \times \frac{1}{1-q^{-1}} = \frac{1}{u_0} \times \frac{q}{q-1}.$$

La série de terme général $\frac{1}{u_0}\frac{1}{q^n}$ étant croissante, elle est majorée par sa limite. Ainsi, $\forall n \geq 0, T_n \leq \frac{q}{(q-1)u_0}$.

(c) Justifier que (T_n) converge.

Correction : (T_n) est une suite de terme positif donc elle est croissante. Comme elle est majorée, elle converge.

Exercice 2 (Barème approximatif : 7 points)
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-|x|}$.

(a) Rappeler la définition avec quantificateurs de « f est continue en $a \in \mathbb{R}$ ».

Correction :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]-1,1[,\ \Big(|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\Big).$$

(b) Utiliser cette définition pour montrer que f est continue en $a = 0$.

Correction : Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on résout $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{1}{1-|x|} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < \frac{1}{1-|x|} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1-\varepsilon} < |x| < 1 + \frac{1}{1+\varepsilon}$$

On choisit alors $\eta = 1 + \frac{1}{1+\varepsilon}$ et on a bien

$$|x| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

2. Soit $\Omega =]-1,1[$ et f l'application définie sur $\Omega\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{\sin 2x}$.

(a) Montrer que que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1-t)}{t} = -1$.

Correction : On pose $g(t) = \ln(1-t)$. La fonction g est définie et dérivable sur Ω avec $g'(t) = -\frac{1}{1-t}$ donc

$$\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \frac{\ln(1-t)}{t} \underset{t\to 0}{\to} g'(0) = -1.$$

(b) Montrer que f est prolongeable par continuité en $a = 0$ en une fonction $\widetilde{f}$ à préciser.

Correction : En tant que quotient et composition de fonctions usuelles (polynôme, ln, sinus), la fonction f est continue sur son domaine de définition $\Omega \backslash \{0\}$. De plus,

$$f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{x}{2} \underset{x \to 0}{\to} -1 \times 1 \times 0 = 0.$$

Par conséquent la fonction f est prolongeable en une fonction continue sur Ω définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x^2)}{\sin 2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(c) Montrer que $\widetilde{f}'(0) = -\frac{1}{2}$.
Correction :

$$\widetilde{f}'(0) = \frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1-x^2)}{x \sin 2x} = \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{1}{2} \underset{x \to 0}{\to} -1 \times 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

(d) Justifer que $\widetilde{f}$ est dérivable sur Ω et montrer que, pour $x \neq 0$, on a

$$\widetilde{f}'(x) = -\frac{2x}{(1-x^2)\sin(2x)} - \frac{2f(x)}{\tan(2x)}.$$

Correction : On vient de justifier que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0. De plus, f est composée de fonctions usuelles donc donc elle est dérivable sur son domaine de définition $\Omega \backslash \{0\}$. Finalement, $\widetilde{f}$ est dérivable sur Ω et pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}'(x) = \frac{\frac{-2x\sin(2x)}{(1-x^2)} - 2\cos(2x)\ln(1-x^2)}{(\sin(2x))^2} &= -\frac{2x}{\sin(2x)} \times \frac{1}{1-x^2} - \frac{2\cos(2x)\ln(1-x^2)}{(\sin(2x))^2} \\ &= -\frac{2x}{\sin(2x)} \times \frac{1}{1-x^2} - 2 \times \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} \times \frac{\ln(1-x^2)}{\sin(2x)} \\ &= -\frac{2x}{\sin(2x)} \times \frac{1}{1-x^2} - 2 \times \frac{1}{\tan(2x)} \times f(x) \end{aligned}$$

(e) La fonction dérivée $\widetilde{f}'$ est-elle continue en $a = 0$?
Correction : On doit montrer que $\lim_{x \to 0} \widetilde{f}'(x) = \widetilde{f}'(0)$.

$$-\frac{2x}{\sin(2x)} \times \frac{1}{1-x^2} \underset{x \to 0}{\to} -1 \times 1 = -1$$

$$\frac{2f(x)}{(\tan(2x))} = \frac{2x}{\tan(2x)} \times \frac{f(x)}{x} \underset{x \to 0}{\to} 1 \times (-\frac{1}{2}) \times 1 = -\frac{1}{2}$$

Par conséquent $\lim_{x \to 0} \widetilde{f}'(x) = -1 - (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} = \widetilde{f}'(0)$.