MT02 - Médian (1h30 min) - P2022

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Rappel : pour un total de 20 points, choisir de traiter
- soit l'exercice 1 - parties I, II et III ;
- soit l'exercice 1 - parties I et II - et l'exercice 2.

Exercice 1 (Barème approximatif : (7,6,7) points)

On considère la fonction définie et continue sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2 - 3x + 2x^2}$.
Dans tout l'exercice (u_n) est la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Partie I - Étude d'une suite récurrente

1. (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = x$.
   (b) Justifier que $f(x) - x$ est du même signe que $x^2 - 3x + 2$.
   Dresser le tableau de signe de $f(x) - x$ sur $[0, +\infty[$.
2. Que peut-on dire de (u_n) si u_0 est un point fixe de f ?
3. On suppose dans cette question que $u_0 \in]1, 2[$.
   (a) Montrer par récurrence sur n que $\forall\, n \geq 0,\ u_n \in]1, 2[$.
   (Indication : observer que $2x^2 - 3x + 2 = 2(x-1)^2 + x$.)
   (b) Préciser la monotonie de (u_n).
   (c) Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ à préciser.
4. On suppose dans cette question que $u_0 > 2$.
   (a) Préciser la monotonie de (u_n).
   (b) Montrer par l'absurde que (u_n) diverge.
   (c) Montrer par l'absurde que (u_n) tend vers $+\infty$.

Partie II - Étude d'un ensemble

On admet que la fonction g définie sur $]2, +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est strictement croissante.
Pour $u_0 > 2$ fixé, on pose $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on définit l'ensemble $A := \{w_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$.

1. Calculer $\ell' = \lim_{x \to +\infty} g(x)$.
2. Justifier que $\operatorname{Im} g$ est un intervalle ouvert, puis déterminer $\operatorname{Im} g$.
3. Déduire de $\mathbf{I-4}$) que (w_n) converge vers ℓ'.
4. Justifier que (w_n) est strictement croissante.
5. En déduire que A admet un plus petit élément $q = \min A$ à préciser et que $q > 1$.
6. Démontrer que $\sup A = \ell'$.
7. L'ensemble A admet-il un plus grand élément ?

Partie III - Étude de séries numériques

1. Compléter la proposition suivante par l'un des symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

$$\forall\,(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \Big(\sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge} \quad \dots \quad \sum_{n\geq 0} |v_n| \text{ converge}\Big).$$

2. (a) A l'aide des règles de Riemann, justifier que la série définie par $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{f(k)}$ diverge.

   (b) Montrer que la série définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{f(k)}$ converge.
   (Indication : montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et utiliser la monotonie de f.)

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$ où (u_n) est la suite récurrente de premier terme $u_0 > 2$.
   (a) Montrer par récurrence sur n que $\forall\, n \geq 0,\ u_n \geq q^n u_0$, où q est défini à la question **II-5)**.
   (b) En déduire que $\forall n \geq 0, T_n \leq \frac{q}{(q-1)u_0}$. *(Indication : étudier la série géométrique de terme général $\frac{1}{u_0}(\frac{1}{q})^n$.)*
   (c) Justifier que (T_n) converge.

Exercice 2 (Barème approximatif : 7 points)
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit g l'application définie sur $]-1,1[$ par $g(x) = \dfrac{1}{1-|x|}$.
   (a) Rappeler la définition avec quantificateurs de « g est continue en $a \in \mathbb{R}$ ».
   (b) Utiliser cette définition pour montrer que g est continue en $a = 0$.

2. Soit $\Omega =]-1,1[$ et f l'application définie sur $\Omega\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{\sin 2x}$.
   (a) Montrer que que $\lim_{t\to 0} \dfrac{\ln(1-t)}{t} = -1$.
   (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en $a = 0$ en une fonction $\widetilde{f}$ à préciser.
   (c) Montrer que $\widetilde{f}'(0) = -\frac{1}{2}$.
   (d) Justifer que $\widetilde{f}$ est dérivable sur Ω et montrer que, pour $x \neq 0$, on a

$$\widetilde{f}'(x) = -\frac{2x}{(1-x^2)\sin(2x)} - \frac{2f(x)}{\tan(2x)}.$$

   (e) La fonction dérivée $\widetilde{f}'$ est-elle continue en $a = 0$?