MT02 - Médian (1h30 min) - P2023

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : 8 points - 35min)

Soient f et g deux applications définies sur $I = [0, +\infty[$ par $f(x) = x^3 + x + 1$ et $g(x) = x\ln(f(x))$.

1. (a) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction f définie sur l'intervalle I.
   Correction : Soit f une application définie et continue sur un intervalle I. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Pour tout réel y_0 strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a, b[$, tel que $f(c) = y_0$.

   (b) On rappelle que $e \approx 2.718$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = e$.
   Correction : f est un polynôme donc il s'agit d'une application continue sur I. On a $f(0) = 1 < e < f(1) = 3$. D'après le theorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = e$.

   (c) Montrer que $f(x) - e = (x - c)(x^2 + cx + c^2 + 1)$.
   Correction : On développe le membre de droite

$$(x - c)(x^2 + cx + c^2 + 1) = x^3 + cx^2 + (c^2 + 1)x - cx^2 - c^2x - c^3 - c = x^3 + x - c^3 - c.$$

   D'après la question **2.**, on a $c^3 + c + 1 = e \Leftrightarrow -c^3 - c = 1 - e$. D'où

$$(x - c)(x^2 + cx + c^2 + 1) = x^3 + x + 1 - e.$$

   (d) En déduire que $\forall\, x \in I,\ g(x) - x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) - e \leq 0 \Leftrightarrow x - c \leq 0$.
   Dresser le tableau de signe de $g(x) - x$ sur $[0, +\infty[$.
   Correction : on factorise

$$g(x) - x = x(\ln(x^3 + x + 1) - 1) = x\ln\left(\frac{x^3 + x + 1}{e}\right).$$

   Comme $x \geq 0$ sur I, on a

$$g(x) - x \leq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^3 + x + 1}{e}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^3 + x + 1}{e}\right) \leq 1 \Leftrightarrow x^3 + x + 1 \leq e \Leftrightarrow f(x) - e \leq 0.$$

   Comme le discriminant de $x^2 + cx + c^2 + 1$ est $\Delta = c^2 - 4(c^2 + 1) < 0$, on en déduit que ce facteur est strictement positif sur $\mathbb{R}$. L'expression $f(x) - e$ est donc du même signe que $x - c$.

x	0		c		$+\infty$
$g(x) - x$	0	$-$	0	$+$	

2. Dans cette question, on considère la suite récurrente définie par $u_0 \in]0, c[$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

   (a) Montrer par récurrence sur n que $\forall n \geq 0,\ u_n \in]0, c[$.

   Correction : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $P(n) :=$« $u_n \in]0, c[$ ».
   <u>Initialisation à $n = 0$</u> : d'après l'énoncé $P(0)$ est vraie.
   <u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vrai. D'après le tableau de signe

$$u_n < c \Rightarrow g(u_n) - u_n < 0 \Rightarrow u_{n+1} = g(u_n) < u_n < c.$$

   De plus

$$u_n > 0 \Rightarrow f(u_n) = 1 + u_n + u_n^3 > 1 \Rightarrow \ln(f(u_n)) > \ln(1) = 0 \Rightarrow u_{n+1} = g(u_n) = u_n \ln(f(u_n)) > 0.$$

   L'hérédité est vérifiée donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, c[$.

   (b) Préciser la monotonie de (u_n).

   Correction : D'après le tableau de signe de g et la question **2a)**,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n < 0$$

   donc (u_n) est (strictement) décroissante.

   (c) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

   Correction : La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. La fonction g est continue en tant que produit et composition de fonctions usuelles (ln et polynôme). La limite de (u_n) est donc un point fixe de f. Les solutions de $f(x) = x$ sont 0 et c. Comme la limite minore tous les termes de la suite, il s'agit de 0.

3. Dans cette question, on considère la suite récurrente définie par $u_0 \in]c, +\infty[$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

   (a) Préciser la monotonie de (u_n).

   Correction : Tout d'abord, comme à la question **2a)**, on peut montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > c$. D'après le tableau de signe de g,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n > 0$$

   donc (u_n) est (strictement) croissante.

   (b) Montrer par l'absurde que (u_n) diverge.

   Correction : Supposons que (u_n) converge. Comme (u_n) est croissante, tous les termes de la suite sont majorés par la limite. Or les seuls limites possibles sont 0 et c qui sont inférieures au premier terme u_0 de la suite. La négation est absurde donc la proposition « (u_n) diverge » est vraie.

Exercice 2 (Barème approximatif : 7 points - 30 min)

Soit (s_n) et (v_n) deux séries définies pour $n \geq 0$ par $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$ et $v_n = s_n + \dfrac{1}{n+1}$.

1. À l'aide des règles de Riemann, justifier que (s_n) converge. On notera ℓ cette limite.

   Correction : le terme général est équivalent à $\frac{1}{2n^2}$ donc la série converge d'après les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Dans la suite, on admettra que la limite de (s_n) *est* $\ell = 2\ln(2) \approx 1.38$.

2. Montrer que les suites (s_n) et (v_n) sont adjacentes.

Correction : • Monotonie de (s_n) :

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+2)(2n+3)} > 0.$$

La suite (s_n) est croissante.

• Monotonie de (v_n) :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = s_{n+1} + \frac{1}{n+2} - s_n - \frac{1}{n+1} &= \frac{1}{(n+2)(2n+3)} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n+1+(n+1)(2n+3)-(n+2)(2n+3)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} \\ &= \frac{n+1+2n^2+5n+3-(2n^2+7n+6)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} \\ &= \frac{-n-2}{(n+1)(n+2)(2n+3)} < 0 \end{aligned}$$

La suite (v_n) est décroissante.

• De plus $v_n - s_n = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

<u>Conclusion</u> : Les suites (s_n) et (v_n) sont adjacentes. On en déduit que (v_n) converge vers ℓ également et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \leq \ell \leq v_n.$$

3. Soit $A := \{(-1)^n + v_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$. On notera $w_n = (-1)^n + v_n$ les éléments de A.

(a) Calculer w_0 et w_1. Puis ordonner totalement les éléments de A.

Correction : Les premiers termes sont

$$w_0 = 1 + v_0 = 1 + s_0 + \tfrac{1}{0+1} = 2 + \tfrac{1}{(0+1)\times(2\times 0+1)} = 2 + 1 = 3$$

$$w_1 = -1 + v_1 = -1 + s_1 + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{(0+1)\times(2\times 0+1)} + \tfrac{1}{(1+1)\times(2\times 1+1)} = -\tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{3}.$$

On sépare ensuite les éléments de A en deux sous-ensembles

$$A = \{w_{2n} = 1 + v_{2n}; \; n \in \mathbb{N}\} \cup \{w_{2n+1} = -1 + v_{2n+1}; \; n \in \mathbb{N}\}.$$

La suite (v_n) est strictement décroissante donc les sous suites (w_{2n}) et (w_{2n+1}) aussi. Toute suite extraite de (v_n) converge vers ℓ également donc $w_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + 1$. Les termes d'une suite décroissante et convergente sont minorés par leur limite (démonstration [1] en bas de page pour rappel). On peut ordonner les éléments de A comme suit

$$w_0 > w_2 > \cdots > w_{2n} \geq 1 + \ell \approx 2.38 > w_1 = \frac{2}{3} > w_3 > \cdots > w_{2n+1} > \cdots$$

1. On montre que la limite d'une suite décroissante et convergente est un minorant par l'absurde : Supposons que $\ell' = \ell - 1$ n'est pas un minorant. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - 1 > w_{2N+1}$. La décroissance de (w_{2n+1}) entraîne

$$n \geq N \Rightarrow \ell - 1 > w_{2N+1} \geq w_{2n+1} \underset{\text{par passage à la limite}}{\Rightarrow} \ell - 1 > w_{2N+1} \geq \ell - 1 \Rightarrow \ell - 1 \neq \ell - 1.$$

Ce qui est absurde.

(b) Montrer que A admet un plus grand élément, noté $\max A$, dont on précisera la valeur.
Correction : D'après ce qui précède, on en déduit que

$$\exists\, w_0 \in A,\ \forall\, x \in A,\ x \leq w_0.$$

Donc $\max A = w_0 = 3$.

(c) Montrer que A admet une borne inférieure.
Correction : La suite (v_n) est minorée par sa limite ℓ donc la suite w_n est minorée par $\ell - 1$. L'ensemble A est une partie non vide ($w_0 = 3 \in A$) et minorée de $\mathbb{R}$ donc $\inf A$ existe d'après l'axiome de la borne inf.

(d) Rappeler la caractérisation de la borne inférieure de A, à l'aide des quantificateurs.
Correction :

$$\begin{cases} 1)\ \forall x \in A,\ \inf A \leq x \\ 2)\ \forall t > \inf A,\ \exists x \in A,\ x < t\ . \end{cases}$$

(e) Utiliser cette caractérisation pour démontrer que $\inf A = \ell - 1$.
Correction : Toute sous suite de (v_n) converge vers ℓ donc $w_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \ell - 1$. La limite de (w_{2n+1}) satisfait la caractérisation de la borne inférieure :
- On a déjà justifié que $\ell - 1$ est un minorant de A.
- On montre que la limite est le plus grand des minorants : pour $\ell' = \ell - 1$ on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow \ell' - \varepsilon < w_{2n+1} < \ell' + \varepsilon)$$

On applique la définition de la limite à $\varepsilon = t - \ell' > 0$ et on prend $n = N + 1$

$$\forall t < \ell', \exists n = N + 1 \in \mathbb{N},\ u_n < \ell' + \varepsilon = t.$$

Exercice 3 (Barème approximatif : 5 points - 25min)
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1 - \cos(3x)}{e^x - e^{-x}}$.

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(3x)}{x^2} = \frac{9}{2}$.
   Correction : On sait que $\frac{1-\cos t}{t} \underset{t\to 0}{\to} \frac{1}{2}$. On compose cette limite avec $t = 3x \underset{x\to 0}{\to} 0$:

$$\frac{1 - \cos(3x)}{(3x)^2} \underset{t\to 0}{\to} \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - \cos(3x)}{x^2} = \frac{1 - \cos(3x)}{(3x)^2} \times 9 \underset{t\to 0}{\to} \frac{1}{2} \times 9 = \frac{9}{2}.$$

2. Déterminer $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$.
   Correction : On pose $g(x) = e^x - e^{-x}$. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\to} g'(0).$$

   On a $g'(x) = e^x + e^{-x}$ donc $g'(0) = e^0 + e^{-0} = 2$.

3. Montrer que f est prolongeable par continuité en $a=0$ en une fonction $\widetilde{f}$ à préciser.

   Correction : • l'expression de $f(x)$ est construite par somme, composition et quotient de fonctions usuelles (cosinus, exponentielle, polynôme) donc f est continue (même $\mathscr{C}^\infty$) sur son domaine de définition $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

   • D'après les résultats précédents, on a

$$f(x)=\frac{1-\cos(3x)}{x^2}\times\frac{x}{e^x-e^{-x}}\times x=\frac{9}{2}\times\frac{1}{2}\times 0=0.$$

   • On en déduit que f est prolongeable en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}$. Elle est définie par

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

4. Montrer que $\widetilde{f}'(0)=\frac{9}{4}$.

   Correction :

$$\tilde{f}'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x(e^x-e^{-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x^2}\times\frac{x}{e^x-e^{-x}}=\frac{9}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}.$$

5. Justifer que $\widetilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour $x\neq 0$, on a

$$\widetilde{f}'(x)=\frac{3\sin(3x)}{e^x-e^{-x}}-f(x)\times\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

   Correction : • On sait déjà que $\tilde{f}$ est dérivable en 0. Sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, l'expression de $\tilde{f}(x)$ est donnée par celle de $f(x)$ et on a déjà justifié à la question **3** que f est dérivable sur son domaine de définition en tant que somme, quotient et composition de fonctions usuelles.

   • Pour $x\neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\tilde{f}'(x)=f'(x)&=\frac{3\sin(3x)(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})(1-\cos(3x))}{(e^x-e^{-x})^2}\\&=\frac{3\sin(3x)}{e^x-e^{-x}}-\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\times\frac{1-\cos(3x)}{e^x-e^{-x}}\end{aligned}$$

6. La fonction dérivée $\widetilde{f}'$ est-elle continue en $a=0$?

   Correction : Il s'agit de vérifier que $\lim\limits_{x\to 0}\tilde{f}'(x)=\tilde{f}'(0)$.

$$\frac{3\sin(3x)}{e^x-e^{-x}}=3\times\frac{\sin(3x)}{3x}\times 3\times\frac{x}{e^x-e^{-x}}\underset{x\to 0}{\to}3\times 1\times 3\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}.$$

$$f(x)\times\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{1-\cos(3x)}{x^2}\times\frac{x^2}{(e^x-e^{-x})^2}\times(e^x+e^{-x})\underset{x\to 0}{\to}\frac{9}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2=\frac{9}{4}$$

   On en déduit que

$$\lim_{x\to 0}\tilde{f}'(x)=\frac{9}{2}-\frac{9}{4}=\frac{9}{4}=\tilde{f}'(0).$$

   Donc oui, $\tilde{f}'$ est continue en 0. Elle est même continue sur $\mathbb{R}$. On peut dire que $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.