MT02 - Médian (1h30 min) - P2023

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : 8 points - 35min)
Soient f et g deux applications définies sur $I = [0, +\infty[$ par $f(x) = x^3 + x + 1$ et $g(x) = x\ln(f(x))$.

1. (a) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction f définie sur l'intervalle I.
   (b) On rappelle que $e \approx 2.718$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = e$.
   (c) Montrer que $f(x) - e = (x - c)(x^2 + cx + c^2 + 1)$.
   (d) En déduire que $\forall\, x \in I,\ g(x) - x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) - e \leq 0 \Leftrightarrow x - c \leq 0$.
   Dresser le tableau de signe de $g(x) - x$ sur $[0, +\infty[$.

   Vous pouvez représenter les suites récurrentes ci-dessous sur le graphique au dos de la feuille.
2. Dans cette question, on considère la suite récurrente définie par $u_0 \in]0, c[$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Montrer par récurrence sur n que $\forall\, n \geq 0,\ u_n \in]0, c[$.
   (b) Préciser la monotonie de (u_n).
   (c) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. Dans cette question, on considère la suite récurrente définie par $u_0 \in]c, +\infty[$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Préciser la monotonie de (u_n).
   (b) Démontrer par l'absurde que (u_n) diverge.

Exercice 2 (Barème approximatif : 7 points - 30 min)

Soit (s_n) et (v_n) deux suites définies pour $n \geq 0$ par $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$ et $v_n = s_n + \dfrac{1}{n+1}$.

1. À l'aide des règles de Riemann, justifier que (s_n) converge.

   Dans la suite, on admettra que la limite de (s_n) est $\ell = 2\ln(2) \approx 1.38$.
2. Montrer que les suites (s_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Soit $A := \{(-1)^n + v_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$. On notera $w_n = (-1)^n + v_n$ les éléments de A.
   (a) Calculer w_0 et w_1. Puis ordonner totalement les éléments de A.
   (b) Montrer que A admet un plus grand élément, noté $\max A$, dont on précisera la valeur.
   (c) Montrer que A admet une borne inférieure.
   (d) Rappeler la caractérisation de la borne inférieure de A, à l'aide des quantificateurs.
   (e) Utiliser cette caractérisation pour démontrer que $\inf A = \ell - 1$.

Exercice 3 (Barème approximatif : 5 points - 25min)

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1-\cos(3x)}{e^x - e^{-x}}$.

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{x^2} = \frac{9}{2}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en $a=0$ en une fonction $\widetilde{f}$ à préciser.
4. Montrer que $\widetilde{f}'(0) = \frac{9}{4}$.
5. Justifer que $\widetilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour $x \neq 0$, on a

$$\widetilde{f}'(x) = \frac{3\sin(3x)}{e^x - e^{-x}} - f(x) \times \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

6. La fonction dérivée $\widetilde{f}'$ est-elle continue en $a=0$?