MT02 - Test 1 (45 min) - P2022

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

**Exercice 1**
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soient $P$ et $Q$ deux propositions. On définit le connecteur logique $\otimes$, appelé *"ou exclusif"*, par :
$$P \otimes Q := \text{« } (P \text{ et non } Q) \text{ ou } (\text{non } P \text{ et } Q) \text{ »}.$$
Les équivalences suivantes sont-elles toujours vraies ? Justifier !

(a) $((P \text{ ou } Q) \text{ et } (\text{non } P \text{ ou non } Q)) \quad \Leftrightarrow \quad (P \otimes Q)$.

Correction : on dresse les deux tables de vérité :

| $P$ | $Q$ | $P$ et *non* $Q$ | *non* $P$ et $Q$ | $P \otimes Q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F |
| V | F | V | F | V |
| F | V | F | V | V |
| F | F | F | F | F |

| $P$ | $Q$ | $P$ ou $Q$ | *non* $P$ ou *non* $Q$ | $((P$ ou $Q)$ et (non $P$ ou non $Q$)) |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F |
| V | F | V | V | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | F | V | F |

Les tables de vérités sont identiques donc les deux propositions sont équivalentes.

(b) $((P \text{ et } Q) \text{ ou } (\text{non } P \text{ et non } Q)) \quad \Leftrightarrow \quad (P \otimes Q)$.

Correction :

| $P$ | $Q$ | $P$ et $Q$ | *non* $P$ et *non* $Q$ | $((P$ et $Q)$ ou (non $P$ et non $Q$)) |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | V |
| V | F | F | F | F |
| F | V | F | F | F |
| F | F | F | V | V |

D'après les tables de vérités, l'une est la négation de l'autre. Il n'y a donc pas équivalence.

2. Préciser si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier !

(a) $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+y) = \sin(x+y)$.

Correction : FAUX car la négation est vraie :
$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x = -y \in \mathbb{R},\ \cos(x+y) \neq \sin(x+y).$$
En effet, $\cos(x+y) = \cos(0) = 1$ et $\sin(x+y) = \sin(0) = 0$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \cos(x+y) = \sin(x+y)$.

Correction : VRAI. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y = -x + \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R},\ \cos(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(x+y)$.

**Exercice 2**

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On note $\vec{x} = (x_1, x_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Soit $h$ l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$h(\vec{x}) = \big(x_1 x_2\ ,\ x_2 + 1\big)$$

(a) Écrire, à l'aide des quantificateurs, la définition de « $h$ est injective sur $\mathbb{R}^2$ ».

Correction : $\forall (\vec{x}, \vec{x'}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ h(\vec{x}) = h(\vec{x'}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{x'}$.

(b) Montrer que $h$ n'est pas injective.

Correction : On montre que la négation est vraie.

$$\exists \vec{x} = (0,0) \in \mathbb{R}^2,\ \exists \vec{x'} = (1,0) \in \mathbb{R}^2,\ h(\vec{x}) = h(\vec{x'}) = (0,1) \text{ et } \vec{x} \neq \vec{x'}.$$

(c) L'application $h$ est-elle surjective ?

Correction : $h$ surjective $\Leftrightarrow \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^2,\ \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^2,\ \vec{y} = h(\vec{x})$. Pour $\vec{y}$ fixé, on résout $\vec{y} = h(\vec{x})$.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 x_2 & = & y_1 \\ x_2 + 1 & = & y_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 x_2 & = & y_1 \\ x_2 & = & y_2 - 1 \end{array} \right.$$

Soit $y_2 \neq 1$ et le système admet une unique solution $(\frac{y_1}{y_2 - 1}, y_2 - 1)$.
Soit $y_2 = 1$ alors $x_2 = 1$ et le système admet au moins une solution ssi $y_1 = 0$.
L'application $h$ n'est donc pas surjective. La négation est vraie :

$$\exists \vec{y} = (1,1),\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2,\ \vec{y} \neq h(\vec{x}).$$

2. Soient $A$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante.

(a) Rappeler la définition de la borne supérieure de $A$, notée $\sup A$.

Correction : Par hypothèse sur $A$, $\sup A$ existe. Il s'agit du plus petit des majorants de $A$.

(b) Justifier que l'ensemble $f(A) := \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ y = f(x)\}$ admet une borne supérieure.

Correction : • Comme $A \neq \varnothing$, il existe $a \in A$. Comme $f$ est une application l'image $f(a)$ existe et $f(a) \in f(A)$. Donc $f(A) \neq \varnothing$.
• Par hypothèse, $A$ est majoré. Autrement dit $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leq M$.
Comme $f$ est croissante, on en déduit que $\forall x \in A, f(x) \leq f(M)$. Donc $f(A)$ est majoré par $f(M)$.
• L'axiome de la borne supérieur assure l'existence de la borne sup de $f(A)$.

(c) Montrer que $\sup f(A) \leq f(\sup A)$.

Correction : Comme $\sup A$ est un majorant, on peut écrire

$$\forall x \in A,\ x \leq \sup A \underset{f \text{ est croissante}}{\Rightarrow} \forall x \in A,\ f(x) \leq f(\sup A).$$

Cela signifie que $f(\sup A)$ est un majorant de $f(A)$.
Comme $\sup f(A)$ est le plus petit des majorants, on en déduit que $\sup f(A) \leq f(\sup A)$.

(d) Peut-on affirmer que pour toute fonction croissante $f$, on a $\sup f(A) = f(\sup A)$ ?
*(Indication : étudier le cas $f(x) = E(x)$, avec un ensemble $A$ de votre choix.)*
Correction : Non. Pour $A = [0, 1[$, on a $\sup A = 1$, $f(\sup A) = 1$, puis $f(A) = 0$ et $\sup f(A) = 0 < f(\sup A)$.

**Exercice 3**

On considère les suites $(u_n)$ définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = \frac{3n+4}{n+1}$.

1. Rappeler la définition avec quantificateurs de « la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$ ».
   Correction :
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

2. A l'aide de cette définition, montrer que $(u_n)$ converge vers une limite $\ell$ à préciser.
   Correction : La limite est $\ell = 3$. Soit $\varepsilon > 0$. On résout l'inéquation $|u_n - 3| < \varepsilon$.
   Tout d'abord,
   $$|u_n - 3| = \left|\frac{3n+4}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{(3n+4) - (3n+3)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$
   On a les équivalences suivantes :
   $$|u_n - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$
   On pose $N = E(\frac{1}{\varepsilon} - 1) + 1 \geq 0$. Ainsi, par définition de la fonction partie entière, on a
   $$n > N \Rightarrow n > E(\tfrac{1}{\varepsilon} - 1) + 1 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow |u_n - 3| < \varepsilon.$$
   La convergence de $(u_n)$ vers $\ell = 3$ est démontrée.

3. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)$ et compléter les pointillés (par $\leq$ ou $\geq$) :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \quad \dots \quad \ell.$$
   Correction : O étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ :
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = \frac{3n+7}{n+2} - \frac{3n+4}{n+1} &= \frac{(n+1)(3n+7) - (n+2)(3n+4)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{3n^2 + 10n + 7 - (3n^2 + 10n + 8)}{(n+2)(n+1)} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} < 0 \end{aligned}$$
   La suite $(u_n)$ est strictement décroissante. On en déduit que $\forall n \geq 0, \quad u_n \geq \ell = 3$.

4. En déduire que $(v_n)$ définie pour $n \geq 0$ par $v_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ tend vers $+\infty$.
   Correction : D'après la question 3, on a $v_n \geq 3(n+1)$. Comme $3(n+1) \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, on a aussi $v_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$.