MT02 - Test 1 (45 min) - P2023

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : 5 points)

1. Soient P, Q et R trois propositions. Les équivalences suivantes sont-elles toujours vraies ?
   (a) $\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big)$
   (b) $\big(\text{non}\, P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\text{non}\, R \Rightarrow (Q \Rightarrow P)\big)$
2. Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Préciser si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier !
   (a) $\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = f(y)$.
   (b) $\forall f \in E,\ \exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = f(y)$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 5 points)
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On pose $P(n)$:=« $5^n + 3$ est un multiple de 4 » et $Q(n)$:=« $5^n - 3$ est un multiple de 4 ».
   (a) Montrer que les propositions P et Q sont héréditaires sur $\mathbb{N}$.
   (b) Démontrer la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ 5^n + 3$ est un multiple de 4 ».
   (c) Démontrer par l'absurde la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ 5^n - 3$ n'est pas un multiple de 4 ».
2. Soient A, B, C des sous ensembles d'un ensemble E quelconque.
   Montrer que la fonction indicatrice de $(A \cup B) \setminus (B \cap C)$ est égale à $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_B \times \mathbf{1}_C$.

Exercice 3 (Barème approximatif : 5 points)
Soit f l'application définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1 + x + x^2}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x-1) = f(-x)$.
2. Montrer que f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Rappeler la définition de $\operatorname{Im} f$, puis montrer que $\operatorname{Im} f =]0, 4]$.
4. Justifier que $f :]-\infty, -\frac{1}{2}] \to]0, 4]$ est bijective et donner l'expression algébrique de f^{-1}.

Exercice 4 (Barème approximatif : 5 points)

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition avec quantificateurs de « la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ. »
2. Compléter les pointillés par l'un des symboles suivants ($\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) :
   $$(u_n) \text{ converge} \quad \ldots \quad (u_n) \text{ est bornée},$$
   puis démontrer cette proposition.
3. On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n n$.
   (a) Peut-on extraire de (u_n) une sous-suite convergente ? Si oui, laquelle ? Sinon, justifier.
   (b) Peut-on extraire de (e^{u_n}) une sous-suite convergente ? Si oui, laquelle ? Sinon, justifier.