MT02 - Test 2 (45 min) - P2022

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : (5 points)
Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   Correction : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = -(x^2 + 1)e^{-x}$.
   Correction :
$$f'(x) = (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 3)e^{-x} = e^{-x}(-x^2 - 1).$$
3. En déduire que f admet une application réciproque f^{-1} dérivable sur $]0, +\infty[$.
   Correction : La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$. Par conséquent f admet une application réciproque f^{-1} définie et dérivable sur $\operatorname{Im} f$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la continuité de f et le tableau de variation ci-dessous

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty \searrow 0$

   on en déduit que $\operatorname{Im} f =]0, +\infty[$.
4. Sachant que $f(0) = 3$, calculer $(f^{-1})'(3)$.
   Correction : $f(3) = 0 \Leftrightarrow 0 = f^{-1}(3)$. Ainsi
$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(0)} = -1$$

Exercice 2 (Barème approximatif : (7 points)

1. On pose $f(x) = \operatorname{Arcsin}(\frac{x}{2})$. On admet que f est bien définie de $I = [-1, 1]$ dans lui même.
   (a) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.
   Correction : On rappelle que $\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La fonction dérivée de f est donc
$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

(b) En déduire que $\forall\, x \in\,]-1,1[,\ \frac{1}{2} \le f'(x) \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Correction : On effectue successivement les calculs suivants

$$-1 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 3 \le 4 - x^2 \le 4 \Rightarrow \sqrt{3} \le 4 - x^2 \le \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le f'(x) \le \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. (a) Soient $(a,b) \in I^2$, avec $a < b$. Énoncer le théorème des accroissements finis pour la fonction f sur $[a,b]$.

Correction : Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors
$\exists\, c \in\,]a,b[,\ \ f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

(b) En déduire que $\forall (x,x') \in I^2,\ |f(x) - f(x')| \le \frac{1}{\sqrt{3}}|x - x'|$.

Correction : Soient $(x,x') \in I^2$. Soit $x = x'$ et l'inégalité est satisfaite : $|f(x) - f(x')| = 0$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}|x - x'| = 0$.
Soit $x \neq x'$ et on applique l'inégalité des accroissements finis :

$$\exists c \in\,]x,x'[\text{ (ou } c \in\,]x',x[) \ ,\ f(x) - f(x') = f'(c)(x - x').$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| = |f'(c)||x - x'| \le \frac{1}{\sqrt{3}}|x - x'|.$$

(c) Montrer que $\ell = 0$ est l'unique point fixe de f.

Correction : Comme $\sin(0) = 0$, on a bien $0 = \mathrm{Arcsin}(0)$. Par conséquent $f(0) = 0$ et 0 est bien un point fixe de f.
On montre l'unicité par l'absurde : Soit ℓ' un autre point fixe, càd $\ell' \not= 0$ et $\ell' = f(\ell')$. ALors

$$|f(\ell') - f(0)| = |\ell'| \le \frac{1}{\sqrt{3}}|\ell'| \underset{\text{car } \ell' \neq 0}{\Rightarrow} 1 \le \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ce qui est absurde.

(d) Démontrer que la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ converge vers 0.

Correction :

(i) étape 1 : on pose $x = u_n$ et $x' = 0$ dans **2.(b)** et on obtient $|f(u_n) - f(0)| \le \frac{1}{\sqrt{3}}|u_n - 0|$

(ii) étape 2 : on montre par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \le (\tfrac{1}{\sqrt{3}})^n |u_0|.$$

<u>Initialisation à $n = 0$</u> : on a $|u_0| = (\frac{1}{\sqrt{3}})^0 |u_0|$, l'égalité entraîne l'inégalité.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \ge 0$, tel que $|u_n| \le (\frac{1}{\sqrt{3}})^n |u_0|$.
On a $|f(u_n) - f(0)| = |u_{n+1} - 0|$. Ainsi, d'après l'étape 1 on a
$|u_{n+1}| \le (\frac{1}{\sqrt{3}})|u_n| \underset{\text{par Hyp. Réc.}}{\Rightarrow} |u_{n+1}| < (\frac{1}{\sqrt{3}}) \times (\frac{1}{\sqrt{3}})^n |u_0| = (\frac{1}{\sqrt{3}})^{n+1} |u_0|$.
La proposition est vraie au rang $n + 1$.

(iii) étape 3 : Comme $\sqrt{3} > 1$, alors $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ et la suite géométrique $\left((\frac{1}{\sqrt{3}})^n |u_0|\right)_n$ converge vers 0. D'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) aussi.

Exercice 3 (Barème approximatif : (8 points)

1. Soit f une application définie sur un intervalle I et $a \in I$.
Préciser sous quelle condition la fonction f admet un développement de Taylor-Young à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a \in I$. Puis donner cette formule.
Correction : La fonction f admet un développement de Taylor-Young en $a \in I$ si f est de classe $\mathscr{C}^n$. De plus, il existe une fonction ε définie en tout point h tel que $a + h \in I$ et
$$\forall\, a+h \in I,\ f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n\varepsilon(h),$$
avec $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$.

2. Soit p un polynôme de degré 3 tel que pour $k = 0, 1, 2, 3$ on a $p^{(k)}(0) = 2$.
Sans calculs, donner l'expression algébrique de $p(x)$.
Correction : $p(x) = 2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3}$.

3. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ en $a = 0$ à l'ordre 3.
Correction : Il existe une fonction ε définie sur $I =]-\infty, 1[$ telle que
$$\forall\, x \in I,\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x), \qquad \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

4. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto e^x$ en $a = 0$ à l'ordre 3.
Correction : Il existe une fonction ε définie sur $I = \mathbb{R}$ telle que
$$\forall\, x \in I,\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \qquad \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Pour $x \in I =]-\infty, 1[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \alpha e^x + p(x)$.
   (a) Déterminer (en fonction de α) les constantes c_2 et c_3 de sorte
   $$\forall\, x \in I,\ f(x) = (3-\alpha) + (3-\alpha)x + c_2x^2 + c_3x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$
   Correction : Par linéarité de la dérivation, le développement de Taylor -Young à l'ordre 3 de f s'obtient par sommation des développements précédents : il existe une fonction ε définie sur $I =]-\infty, 1[$ telle que
   $$\begin{aligned}\forall\, x \in I,\ f(x) &= [1 + x + x^2 + x^3] - \alpha[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}] + [2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3}] + x^3\varepsilon(x)\\ &= (3-\alpha) + (3-\alpha)x + (2 - \tfrac{\alpha}{2})x^2 + (\tfrac{4}{3} - \tfrac{\alpha}{6})x^3 + x^3\varepsilon(x).\end{aligned}$$
   (b) Pour quelle valeur de α, la fonction f est-elle un infiniment petit au voisinage de $a = 0$. Préciser sa partie principale.
   Correction : La fonction f est un infiniment petit au voisinage de $a = 0$ ssi $f(0) = 3 - \alpha = 0$, soit $\boxed{\alpha = 3}$.
   Dans ce cas la partie principale est $c_2x^2 = \frac{x^2}{2}$.