MT02 - Test 2 (45 min) - P2024

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (10 min - Barème approximatif : 7 points)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ fixé. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
2. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.
3. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ en $a = 0$ à l'ordre 3.
4. Soit β un paramètre réel. Pour $x \in I =]-1, +\infty[$, on pose $f(x) = (1+x)^{-2} + \cos(x) + \beta e^{-x}$.
   (a) Déterminer (en fonction de β) les constantes c_2 et c_3 de sorte que
   $$\forall\, x \in I,\ f(x) = (\beta+2) - (\beta+2)x + c_2x^2 + c_3x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$
   (b) Pour quelle valeur de β, la fonction f est-elle un infiniment petit au voisinage de $a = 0$. Préciser sa partie principale.

Exercice 2 (10 min - Barème approximatif : 4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - x\ln(x)$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $c_1 \in]1, 3[$ tel que $f(c_1) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $c_2 \in]0, c_1[$ tel que $f'(c_2) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe ou concave ? Justifier votre réponse.
4. En déduire que f admet un extremum global sur $[0, +\infty[$ dont on précisera la nature.

Exercice 3 (25 min - Barème approximatif : 9 points)

1. Montrer que $\forall x \in\ [0\,; +\infty[,\quad x - \frac{x^3}{3} \leq \text{Arctan}(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$. *(Indication : dresser les tableaux de variations de $f_1(x) = \text{Arctan}(x) - x + \frac{x^3}{3}$ et $f_2(x) = \text{Arctan}(x) - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$.)*
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{Arctan}(x)}{x}, & \text{si } x > 0, \\ \cos(x), & \text{si } x < 0. \end{cases}$
   (a) Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{f}$ à préciser.
   (b) Montrer qu'il existe $\ell \in]0, 1[$ tel que $\tilde{f}(\ell) = \ell$. *(Indication : utiliser $g(x) = \tilde{f}(x) - x$.)*
   (c) i. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = 0$.
   ii. À l'aide de **Q1.**, montrer que $\forall x > 0,\ \frac{x}{1+x^2}(-\frac{2}{3} + \frac{2x^2}{15} - \frac{x^4}{5}) \leq f'(x) \leq \frac{x}{1+x^2}(-\frac{2}{3} + \frac{x^2}{3})$.
   iii. En déduire que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f'(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{x}$. En déduire que $\tilde{f}$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
   (e) On admet que $\forall\, x \geq 0, |\tilde{f}'(x)| \leq K \approx 0.292$.
   i. Montrer que $\forall\,(x, y) \in [0, +\infty[,\ |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq K|x - y|$.
   ii. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_{n+1} = \tilde{f}(u_n)$, avec $u_0 \geq 0$ fixé, converge vers ℓ.