Final MT90 - A2014-A2016

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 - CHANGER DE COPIE

1. Soient a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a\,;b] \to [a\,;b]$ une fonction.
   On suppose qu'il existe $\lambda \in]0\,;1[$ tel que $\forall (x\,;y) \in [a\,;b]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x-y|$. (**)
   (a) Soit $x_0 \in [a\,;b]$. Rappeler la définition avec des quantificateurs de « f est continue en x_0 ».
   (b) Utiliser la définition pour montrer que f est continue sur $[a\,;b]$.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[a\,;b]$.
2. Soit f une fonction vérifiant les hypothèses de la question précédente et ℓ son point fixe.
   On considère la suite récurrente (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in [a\,;b]\,. \end{cases}$
   (a) Montrer que tous les termes de la suite sont bien définis.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \lambda |u_n - \ell|$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \lambda^n |u_0 - \ell|$.
   (d) En déduire si la suite (u_n) converge et, si oui, donner sa limite.
3. (a) Montrer que ℓ est aussi l'unique point fixe de $f \circ f$.
   (b) Nous avons alors les deux propositions suivantes :

   $(H1)$ $\qquad \forall x \in [a\,,\ell[\,,\ f\circ f(x) - x > 0$ et $\forall x \in]\ell\,,b]\,,\ f\circ f(x) - x < 0$

   $(H2)$ $\qquad \forall x \in [a\,,\ell[\,,\ f\circ f(x) - x < 0$ et $\forall x \in]\ell\,,b]\,,\ f\circ f(x) - x > 0$

   Parmi les propositions $(H1)$ et $(H2)$, laquelle est fausse ? Justifier votre réponse.
   (c) On suppose que f est strictement décroissante et $a \leq u_0 < \ell$. On définit les suites (v_n) et (w_n), pour $n \in \mathbb{N}$, telles que $v_0 = u_0$, $w_0 = u_1$, $v_{n+1} = f\circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.
      i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\,, a \leq v_n < \ell$ et $\ell < w_n \leq b$.
      ii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
      iii. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

Exercice 3 - CHANGER DE COPIE

1. (a) Montrer que la fonction f définie sur $]-1\,;1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   est continue en 0.
   (b) Montrer, à l'aide des suites, que la fonction g définie sur $]-1\,;\,1[\setminus\{0\}$ par $g(x) = \dfrac{1}{x\ln|x|}$ n'admet pas de limite en 0.

(c) En déduire que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

2. Soit h la fonction définie par

$$h: \begin{array}{ccc}]-1\,;1[\setminus\{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{\ln|x|} \end{array}.$$

(a) Montrer que h est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{h}$ qu'on précisera.

(b) Montrer que la fonction $\tilde{h}$ est dérivable en 0, puis préciser la valeur de $\tilde{h}'(0)$.

(c) Justifier que $\tilde{h}$ est dérivable sur $]-1\,;1[$ puis calculer $\tilde{h}'(x)$.

(d) La fonction $\tilde{h}'$ est-elle continue en 0 ? Justifer votre réponse.