Final MT90 - A2014/A2016 - Corrigé

Exercice 1

1. Soient a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a\,;b] \to [a\,;b]$ une fonction.
   On suppose qu'il existe $\lambda \in]0\,;1[$ tel que $\forall (x\,;y) \in [a\,;b]^2 \;, |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x-y|$. $(**)$

   (a) Soit $x_0 \in [a\,;b]$. Rappeler la définition avec des quantificateurs de « f est continue en x_0 ».

   Correction : $\forall \varepsilon > 0 \,, \exists \eta > 0 \,, \forall x \in [a\,;b] \,, (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

   (b) Utiliser la définition pour montrer que f est continue sur $[a\,;b]$.

   Correction : On doit montrer que f est continue en tout point $x_0 \in [a\,;b]$.
   Soit $x_0 \in [a\,;b]$. On a

   $$\forall \varepsilon > 0 \;, \exists \eta = \frac{\varepsilon}{\lambda} > 0 \,, \forall x \in [a\,;b] \,, \Big(|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \lambda |x - x_0| < \lambda \times \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon \Big) .$$

   (c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[a\,;b]$.

   Correction : Tout d'abord, on montre que l'équation admet au moins une solution dans $[a\,;b]$. Ensuite on montre l'unicité de cette solution par l'absurde.
   • On pose $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est définie et continue sur $[a\,;b]$. Par hypothèse, $\forall x \in [a\,;b] \;, a \leq f(x) \leq b$. En particulier, on a $a \leq f(a)$ et $f(b) \leq b$ ce qui se traduit par $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. On distingue les trois cas suivants :
   (i) si $g(a) = 0$ alors $x = a$ est solution de l'équation $f(x) = x$;
   (ii) si $g(b) = 0$ alors $x = b$ est solution de l'équation $f(x) = x$;
   (iii) si $g(a) < 0 < g(b)$, alors d'après le T.V.I. $\exists c \in]a\,;b[\,, g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.
   • Soient deux nombres réels $(x_1 \,, x_2) \in [a\,;b]^2$ tels que $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$. Ceci entraîne $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|$. On suppose $x_1 \neq x_2$.
   Par hypothèse sur f on a $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \leq \lambda |x_1 - x_2| \Rightarrow 1 \leq \lambda$. Ceci contredit l'hypothèse sur λ donc $x_1 = x_2$.

2. Soit f une fonction vérifiant les hypothèses de la question précédente et ℓ son point fixe.
   On considère la suite récurrente (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in [a\,;b] \,. \end{cases}$

   (a) Montrer que tous les termes de la suite sont bien définis.

   Correction : Il faut vérifier, par récurrence sur n, que $\forall n \in \mathbb{N} \,, u_n \in [a\,;b]$.
   • Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $u_0 \in [a\,;b]$. Il n'y a rien à démontrer.
   • Hypothèse de récurrence : $u_n \in [a\,;b]$.
   • Hérédité : On doit montrer que $u_{n+1} \in [a\,;b]$.
   On a $u_{n+1} = f(u_n)$. L'hypothèse de récurrence et l'inclusion $f\big([a\,;b]\big) \subset [a\,;b]$ entraînent $u_{n+1} \in [a\,;b]$.
   • Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \,, u_n \in [a\,;b]$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \;, \; |u_{n+1} - \ell| \leq \lambda |u_n - \ell|$.

   Correction : Précisons que $f(\ell) = \ell$. On utilise $(**)$.
   On a $\forall n \in \mathbb{N} \,, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \lambda |u_n - \ell|$.

   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \;, \; |u_n - \ell| \leq \lambda^n |u_0 - \ell|$.

   Correction : On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   • Initialisation : pour $n = 0$, on a $|u_0 - \ell| = \lambda^0 |u_0 - \ell|$. L'égalité entraîne l'inégalité.

• Hypothèse de récurrence : $|u_n - \ell| \leq \lambda^n |u_0 - \ell|$.
• Hérédité : On doit montrer que $|u_{n+1} - \ell| \leq \lambda^{n+1} |u_0 - \ell|$.
D'après la question précédente on a

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \lambda |u_n - \ell| \ .$$

Maintenant on utilise l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \lambda \times \lambda^n |u_0 - \ell| = \lambda^{n+1} |u_0 - \ell| \ .$$

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |u_n - \ell| \leq \lambda^n |u_0 - \ell|$.

(d) En déduire si la suite (u_n) converge et, si oui, donner sa limite.
Correction : La suite (u_n) converge vers ℓ. En effet, puisque $0 < \lambda < 1$ on a $\lambda^n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et le terme $|u_0 - \ell|$ est constant. D'après les théorèmes de comparaison des suites, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n - \ell = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \ .$$

3. (a) Montrer que ℓ est aussi l'unique point fixe de $f \circ f$.
Correction : • Tout d'abord on remarque que $f(\ell) = \ell \Rightarrow f \circ f(\ell) = f(f(\ell)) = f(\ell) = \ell$ donc ℓ est un point fixe de $f \circ f$.
• De plus, étant donné $(x, y) \in [a\,, b]$, on a

$$|f \circ f(x) - f \circ f(y)| = |f(f(x)) - f(f(y)) \leq K|f(x) - f(y)| \leq K^2 |x - y| \ .$$

Donc $f \circ f$ est Lipschitzienne de rapport $0 < K^2 < 1$. D'après le raisonnement effectué à la question **1.c.**, le point fixe de $f \circ f$ est unique.

(b) Nous avons alors les deux propositions suivantes :

$$(H1) \qquad \forall x \in [a\,, \ell[\,,\ f \circ f(x) - x > 0 \text{ et } \forall x \in]\ell\,, b]\,,\ f \circ f(x) - x < 0$$

$$(H2) \qquad \forall x \in [a\,, \ell[\,,\ f \circ f(x) - x < 0 \text{ et } \forall x \in]\ell\,, b]\,,\ f \circ f(x) - x > 0$$

Parmi les propositions $(H1)$ et $(H2)$, laquelle est fausse ? Justifier votre réponse.
Correction : La proposition $H2$ est fausse car elle contredit le fait que $\mathrm{Im} f \circ f \subset [a\,, b]$ qui entraîne :

$$f \circ f(a) \geq a \text{ et } f \circ f(b) \leq b \ .$$

(c) On suppose que f est strictement décroissante et $a \leq u_0 < \ell$. On définit les suites (v_n) et (w_n), pour $n \in \mathbb{N}$, telles que $v_0 = u_0$, $w_0 = u_1$, $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.

i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\,, a \leq v_n < \ell$ et $\ell < w_n \leq b$.
Correction : On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
• Initialisation : pour $n = 0$, on a par hypothèse $a < v_0 = u_0 < \ell$. De plus, $w_0 = u_1 = f(u_0)$ et f est strictement décroissante donc $u_0 < \ell \Rightarrow w_0 = f(u_0) > \ell$. Comme $\mathrm{Im} f \subset [a\,, b]$ on obtient $w_0 = f(u_0) \leq b$.
• Hypothèse de récurrence : $a \leq v_n < \ell$ et $\ell < w_n \leq b$.
• Hérédité : On doit montrer que $a \leq v_{n+1} < \ell$ et $\ell < w_{n+1} \leq b$
On précise que

$$f \text{ strictement décroissante } \Rightarrow f \circ f \text{ strictement croissante.}$$

On obtient immédiatement

$$\begin{aligned} a \leq v_n < \ell \Rightarrow & f \circ f(a) \leq f \circ f(v_n) < f \circ f(\ell) = \ell \\ & \Rightarrow a \leq v_{n+1} < \ell \text{ car } a \leq f \circ f(a) \text{ et } v_{n+1} = f \circ f(v_n) \,, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \ell < w_n \leq b \Rightarrow & \ell = f \circ f(\ell) < f \circ f(w_n) \leq f \circ f(b) = \ell \\ & \Rightarrow \ell < w_{n+1} \leq b \text{ car } f \circ f(b) \leq b \text{ et } w_{n+1} = f \circ f(w_n) \,. \end{aligned}$$

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq v_n < \ell$ et $\ell < w_n \leq b$.

ii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

Correction : On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

• Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_{2n} = u_0$ et par hypothèse $v_0 = u_0$. De plus, $u_{2n+1} = u_1$ et par hypothèse $w_0 = u_1$. Les deux égalités sont vérifiées

• Hypothèse de récurrence : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

• Hérédité : On doit montrer que $v_{n+1} = u_{2n+2}$ et $w_{n+1} = u_{2n+3}$

On obtient immédiatement

$$v_{n+1} = f \circ f(v_n) = f \circ f(u_{2n}) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} \,,$$

et

$$w_{n+1} = f \circ f(w_n) = f \circ f(u_{2n+1}) = f(u_{2n+2}) = u_{2n+3} \,.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

iii. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

Correction : • On utilise la proposition $(H1)$ pour montrer que (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante.

• D'après **i.**, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq w_n$.

• D'après **2.c.**, $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} \ell \Rightarrow v_n = u_{2n} \underset{n \to +\infty}{\to} \ell$ et $w_n = u_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} \ell$.

Conclusion :Les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

Exercice 3

1. (a) Montrer que la fonction f définie sur $]-1\,;1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue en 0.

Correction : On montre que les limites de la fonction f à droite et à gauche de 0 sont égales à $f(0) = 0$.

• Pour $x > 0$, on a $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$. On utilise le résultat connu $\lim\limits_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty$. D'après les opérations sur les limites on a $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \left(\dfrac{1}{-\infty}\right) = 0$.

• Pour $x < 0$, on a $f(x) = \dfrac{1}{\ln(-x)}$. On a $\lim\limits_{x \to 0-} -x = 0^+$. Par composition de limite, on obtient $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$.

(b) Montrer, à l'aide des suites, que la fonction g définie sur $]-1\,;\,1[\setminus\{0\}$ par $g(x) = \dfrac{1}{x \ln|x|}$ n'admet pas de limite en 0.

Correction : Prenons la suite (x_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ par $x_n = \dfrac{1}{n}$.

On a $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\forall n \geq 2\,, x_n \in]-1\,;\,1[\setminus\{0\}$. On calcule $g(x_n) = \dfrac{1}{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}} = -\dfrac{n}{\ln(n)}$. D'après le théorème des croissances comparées des fonctions usuelles à l'infini, on a $g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. En d'autres termes, la suite $\big(g(x_n)\big)$ diverge. On en déduit que la fonction g n'admet pas de limite en 0.

$\Big($Un autre choix possible est la suite $x_n = e^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient $g(x_n) = -\dfrac{e^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty\Big)$.

(c) En déduire que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Correction : On étudie l'existence d'une limite finie du taux de variation (T.V.) de f en 0.

Pour $x \in]-1\,;\,1[\setminus\{0\}$ on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x\ln|x|}\ .$$

D'après la question **1. b)**, le T.V. de f en 0 n'admet pas de limite finie quand x tend vers 0 donc f n'est pas dérivable en 0.

2. Soit h la fonction définie par

$$\begin{array}{rccc} h: &]-1\,;1[\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{\ln|x|}\ . \end{array}$$

(a) Montrer que h est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{h}$ qu'on précisera.

Correction : On remarque que $\forall x \in]-1\,;1[\setminus\{0\}\ , h(x) = \sin(x)f(x)$. La fonction h est donc le produit d'une fonction bornée (sinus) et d'une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers 0. Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

$\Big($On peut aussi utiliser la continuité de sin et $f\Big)$.

On en déduit que la fonction h est prolongeable par continuité en 0 en la fonction $\tilde{h}$ définie sur $]-1\,;1[$ par

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]-1\,;1[\setminus\{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0\ . \end{cases}$$

(b) Montrer que la fonction $\tilde{h}$ est dérivable en 0, puis préciser la valeur de $\tilde{h}'(0)$.

Correction : On étudie l'existence d'une limite finie du T.V. de $\tilde{h}$ en 0.

Pour $x \in]-1\,;\,1[\setminus\{0\}$ on a

$$\frac{\tilde{h}(x)-\tilde{h}(0)}{x-0} = \frac{\sin(x)}{x\ln|x|} = \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{\ln|x|}\ .$$

D'après le cours, on sait que $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et d'après la question **1. a)** on sait que $\dfrac{1}{\ln|x|} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. D'après les opérations sur les limites finies on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tilde{h}(x)-\tilde{h}(0)}{x-0} = 0$. La fonction $\tilde{h}$ est dérivable en 0 et $\tilde{h}'(0) = 0$.

(c) Justifier que $\tilde{h}$ est dérivable sur $]-1\,;1[$ puis calculer $\tilde{h}'(x)$.

Correction : Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \to |x|$ sont dérivables sur $]-1\,;1[\setminus\{0\}$. La fonction ln est dérivable sur $]0\,;1[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. D'après les opérations sur les fonctions dérivées, on en déduit que $\tilde{h}$ est dérivable sur $]-1\,;1[\setminus\{0\}$. On vient de montrer que $\tilde{h}$ est également dérivable en 0 donc $\tilde{h}$ est dérivable sur $]-1\,;1[$ et on a

$$\forall x \in]-1\,;1[\setminus\{0\}\ ,\ \tilde{h}'(x) = \frac{\cos(x)}{\ln|x|} - \frac{\sin(x)}{x(\ln|x|)^2}\ .$$

(d) La fonction $\tilde{h}'$ est-elle continue en 0 ? Justifer votre réponse.

Correction : La réponse est oui. On doit montrer que $\lim_{x\to 0} \tilde{h}'(x) = \tilde{h}'(0)$. On écrit

$$\tilde{h}'(x) = \cos(x) \times f(x) - \frac{\sin(x)}{x} \times (f(x))^2\ .$$

On utilise les limites suivantes : $\cos(x) \underset{x\to 0}{\to} 1$, $f(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$ et $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ pour en déduire que $\lim_{x\to 0} \tilde{h}'(x) = 0 = \tilde{h}'(0)$ et $\tilde{h}'$ est continue en 0.