Final MT90/MA90 - P2018

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 - CHANGER DE COPIE

Dans cet exercice, les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Soit f une fonction définie sur un intervalle Ω et $a \in \Omega$. Rappeler la définition avec quantificateurs de « f est continue en a ».

   Correction :

   $$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\, \forall x \in \Omega,\, (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

   (b) Utiliser cette définition pour montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ est continue en 0.

   (Indication : on remarquera que $f(x) - 1 \geq 0$.)

   Correction : Soit $\varepsilon > 0$. On remarque que $|f(x) - f(0)| = |\sqrt{1+x^2} - 1| = \sqrt{1+x^2} - 1$. Ensuite, on résoud l'inéquation $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$:

   $$\sqrt{1+x^2} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} < 1+\varepsilon \Leftrightarrow 1+x^2 < (1+\varepsilon)^2 \Leftrightarrow x^2 < (1+\varepsilon)^2 - 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - 1}$$

   On pose $\eta = \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - 1}$. On a bien

   $$|x - 0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon\,.$$

   La fonction f est continue en 0.

2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $]-1\,,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{(\sin x)^2}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \ell. \end{cases}$

   (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

   Correction : La fonction $g : x \mapsto \ln(1+x)$ est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. En utilisant la définition du taux d'accroissement de g en 0, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = g'(0) = 1$.

   (b) Pour quelle valeur de ℓ, la fonction f est-elle continue en 0 ?

   Correction : Par définition, la fonction f est continue en 0 si $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \ell$. On a pour $x \neq 0$:

   $$f(x) = \frac{(\sin x)^2}{\ln(1+x)} = \sin x \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{\ln(1+x)}$$

   On sait que $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$ et que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1$. Donc

   $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \times 1 \times 1 = 0.$$

Il faut que $\boxed{\ell = 0}$.

Dans toute la suite de l'exercice on choisit cette valeur de ℓ.

(c) Montrer que la fonction f est dérivable en 0, puis préciser la valeur de $f'(0)$.

Correction : On doit montrer que la limite du taux d'accroissement de f en 0 existe.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{(\sin x)^2}{\ln(1+x)} - 0}{x-0} = \frac{(\sin x)^2}{x\ln(1+x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\to} 1^2 \times 1 = 1$$

On en déduit que f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = 1}$.

(d) Justifier que f est dérivable sur $]-1\,,+\infty[$, puis montrer que pour $x \neq 0$ on a

$$f'(x) = \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)} - \frac{(\sin x)^2}{(1+x)(\ln(1+x))^2}.$$

Correction : • On sait que la fonction f est dérivable en 0.

• La fonction f est dérivable en tout point $x \neq 0$ par quotient de fonctions dérivables (et $\ln(1+x) \neq 0$). On calcule $f'(x)$ en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions

$$f(x) = (\sin x)^2 \times \frac{1}{\ln(1+x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2(\cos x)(\sin x) \times \frac{1}{\ln(1+x)} + (\sin x)^2 \times \frac{-\frac{1}{1+x}}{(\ln(1+x))^2} = \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)} - \frac{(\sin x)^2}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$$

(e) La fonction f' est-elle continue sur $]-1\,,+\infty[$? Justifier votre réponse.

Correction : • La fonction f' est continue en tout point $x \neq 0$ par somme, quotient et composition de fonctions continues.

• La fonction f' est continue en $x = 0$ si $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

$$\frac{\sin(2x)}{\ln(1+x)} = \frac{\sin(2x)}{2x} \times 2 \times \frac{x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\to} 1 \times 2 \times 1 = 2$$

$$\frac{(\sin x)^2}{(1+x)(\ln(1+x))^2} = \frac{1}{1+x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)^2 \underset{x\to 0}{\to} 1 \times 1^2 \times 1^2 = 1$$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 2 - 1 = 1 = f'(0)$. La fonction f' est continue en 0.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1+\infty[$.

Exercice 2 - CHANGER DE COPIE

Dans cet exercice, les parties I, II et III sont indépendantes.

On définit la fonction f sur $[0\,,\pi]$ par $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0,\pi]$ et que $\forall\, x \in\ [0\,,\pi],\ f'(x) = -\frac{1}{2} f(\pi - x)$.

Partie I - CHANGER DE COPIE

1. Quelle est la nature de $\operatorname{Im} f$? *(soyez le plus précis possible).*

   Correction : La fonction f est continue sur $[0\,,\pi]$ et l'image d'un intervalle fermé et borné par une fonction continue est un intervalle fermé et borné donc $\operatorname{Im} f$ est un intervalle fermé et borné.

2. Déterminer $\operatorname{Im} f$.

   Correction : Il faut étudier les variations de f.
   Par définition de f on a $\forall x \in]0\,,\pi[\,,(\pi - x) \in]0\,,\pi[$ et $f(\pi - x) > 0$, donc $\forall x \in]0\,,\pi[\,,\ f'(x) < 0$.
   • **Réponse 1** : La fonction f étant continue sur $[0\,,\pi]$ et dérivable sur $]0\,,\pi[$, l'égalité des accroissements finis permet de démontrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle fermé $[0\,,\pi]$.
   • **Réponse 2** : On en déduit dans un premier temps que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle ouvert $]0\,,\pi[$. L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue et strictement décroissante est l'intervalle ouvert $]f(\pi)\,,f(0)[=]0\,,\sqrt{2}[$. De plus,
   $f(0) = \sqrt{2} > f(x)$, quelque soit $x \in]0\,,\pi[$,
   $f(\pi) = 0 < f(x)$ quelque soit $x \in [0\,,\pi[$. Donc f est strictement décroissante sur $[0\,,\pi]$.
   • **Conclusion** : On en déduit que $\operatorname{Im} f = [f(\pi)\,,f(0)] = [0\,,\sqrt{2}]$.

3. Déterminer $K = \max\limits_{x\in[0,\pi]} |f'(x)|$.

   Correction : On a $\forall x \in [0\,,\pi]\,,\ |f'(x)| = \frac{1}{2}f(\pi - x)$.
   Puisque $f(\pi - x) \leq \sqrt{2}$ alors $|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   De plus $|f'(\pi)| = |\frac{f(0)}{2}| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   On en déduit que $K = \max\limits_{x\in[0,\pi]} |f'(x)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Montrer que la fonction f est bijective de $[0\,,\pi]$ vers $\operatorname{Im} f$.

   On ne demande pas de déterminer l'expression algébrique de $f^{-1}(x)$.

   Correction : On a montré à la question 2 que la fonction f est continue et strictement monotone sur $[0\,,\pi]$ donc f est bijective de $[0\,,\pi]$ vers $\operatorname{Im} f = [0\,,\sqrt{2}]$.

5. Sur quel intervalle la fonction f^{-1} est-elle dérivable ?

   Correction : La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en tout point $y = f(x)$ pour lequel $f'(x) \neq 0$. Or, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(\pi - x) = 0 \Leftrightarrow x - \pi = \pi \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{2}$.
   La fonction f^{-1} est dérivable sur $[0\,,\sqrt{2}[$.

6. Pour $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$, calculer $f^{-1}(b)$, puis $(f^{-1})'(b)$.

   Correction :

$$a = f^{-1}(\sqrt{\tfrac{3}{2}}) \Leftrightarrow f(a) = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{1 + \cos a} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \Leftrightarrow 1 + \cos a = \tfrac{3}{2} \Leftrightarrow \cos a = \tfrac{1}{2}$$

   L'unique solution dans $[0\,,\pi]$ satisfaisant cette équation est $\boxed{a = \frac{\pi}{3}}$.

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \Rightarrow (f^{-1})'(\sqrt{\tfrac{3}{2}}) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{-\frac{1}{2}f(\frac{2\pi}{3})} = -2\sqrt{2}.$$

Remarque : Pour vérifier ces résultats on peut calculer $f^{-1}(y) = \operatorname{Arccos}(y^2 - 1)$. Cette fonction est bien définie pour $y \in [0, \sqrt{2}] \Rightarrow y^2 - 1 \in [-1\,,1]$. La fonction dérivée est

$$(f^{-1})'(y) = -\frac{2y}{\sqrt{1 - (y^2 - 1)^2}} = -\frac{2y}{\sqrt{2y^2 - y^4}} = -\frac{2}{\sqrt{2 - y^2}} \Rightarrow (f^{-1})'(\sqrt{\tfrac{3}{2}}) = -2\sqrt{2}.$$

La fonction $(f^{-1})'$ n'est pas définie en $y = \sqrt{2}$.

Partie II - CHANGER DE COPIE

On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}$, la notation $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de la fonction f et $f^{(0)} = f$.

1. (QUESTION BONUS) Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est $(2n)$ fois dérivable et que pour tout $x \in [0\,,\pi]$ on a

$$f^{(2n-1)}(x) = 2(-\tfrac{1}{4})^n f(\pi - x) \quad \text{et} \quad f^{(2n)}(x) = (-\tfrac{1}{4})^n f(x)\,.$$

Correction : On pose $P(n) :=$ “ la fonction f est $(2n)$ fois dérivable et pour tout $x \in [0\,,\pi]$ on a

$$f^{(2n-1)}(x) = 2(-\tfrac{1}{4})^n f(\pi - x) \quad \text{et} \quad f^{(2n)}(x) = (-\tfrac{1}{4})^n f(x)\,.\text{”}$$

• <u>Initialisation</u> : on vérifie que la propsosition $P(1)$ est vraie.
Par hypothèse f est une fois dérivable et $f'(x) = -\frac{1}{2}f(\pi - x)$.
Puisque f' est composée de la fonction f et de la fonction $x \mapsto \pi - x$ qui sont dérivables sur $[0, \pi]$, on en déduit que f' est dérivable sur $[0, \pi]$ ou de façon équivalente que f est deux fois dérivable sur $[0, \pi]$ et

$$f''(x) = (f')'(x) = -\frac{1}{2} \times (-1) \times f'(\pi - x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}f(\pi - (\pi - x))\right) = -\frac{1}{4}f(x).$$

Pour $n = 1$, on a $f'(x) = f^{(2n-1)}(x) = 2(-\frac{1}{4})^1 f(\pi - x)$ et $f''(x) = f^{(2)}(x) = (-\frac{1}{4})^1 f(x)$.
La propriété est vraie pour $n = 1$.
• <u>Hérédité</u> : Pour $n \geq 1$ fixé, on montre l'implication $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$.
Supposons que $P(n)$ est vraie. Puisque $f^{(2n)}$ est composée de la fonction f qui est elle-même deux fois dérivable (d'après l'initialisation), on en déduit que f est $2n + 2$ (ou $2(n + 1)$) fois dérivable. Ensuite on calcule les dérivées $2n + 1$-ème et $2n + 2$-ème :

$$f^{(2n+1)}(x) = (f^{(2n)})'(x) = (-\tfrac{1}{4})^n f'(x) = (-\tfrac{1}{4})^n \times 2(-\tfrac{1}{4})f(\pi - x) = 2(-\tfrac{1}{4})^{n+1} f(\pi - x)$$

et

$$f^{(2n+2)}(x) = (f^{(2n)})''(x) = (-\tfrac{1}{4})^n f''(x) = (-\tfrac{1}{4})^n \times (-\tfrac{1}{4})f(x) = (-\tfrac{1}{4})^{n+1} f(x).$$

$P(n + 1)$ est vraie.
• <u>Conclusion</u> : $\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ P(n)$.

2. Soit $a \in [0\,,\pi]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la série

$$S_n = f'(a) + f''(a) + f^{(3)}(a) + \cdots + f^{(2n-1)}(a) + f^{(2n)}(a) = \sum_{k=1}^{2n} f^{(k)}(a).$$

(a) Donner une condition nécessaire sur $f^{(n)}(a)$ pour que la série S_n converge.

Correction : Il faut que $\boxed{f^{(n)}(a) \underset{n\to\infty}{\to} 0}$.

(b) Démontrer cette condition nécessaire.

Correction : • Si $n = 2k + 1$ est impair, alors

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{1}{2^{2k+1}}f(\pi - x) \Rightarrow |f^{(n)}(x)| = |f^{(2k+1)}(x)| = \frac{f(\pi - x)}{2^{2k+1}} = \frac{f(\pi - x)}{2^n}$$

• Si $n = 2k$ est pair, alors

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k\frac{1}{2^{2k}}f(x) \Rightarrow |f^{(n)}(x)| = |f^{(2k)}(x)| = \frac{f(x)}{2^{2k}} = \frac{f(x)}{2^n}$$

- Par conséquent, comme $0 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$ et $0 \leq f(\pi - x) \leq \sqrt{2}$, on obtient

$$\forall\, x \in [0\,,\pi]\,,\ |f^{(n)}(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

(c) Montrer que

$$S_n = (2f(\pi - a) + f(a)) \sum_{k=1}^{n} (-\tfrac{1}{4})^k.$$

Correction : On sépare la somme des dérivées n-ème de f en deux selon les indices pairs et impairs :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} f^{(2k-1)}(a) + \sum_{k=1}^{n} f^{(2k)}(a) &= 2f(\pi - a) \sum_{k=1}^{n} (-\tfrac{1}{4})^k + f(a) \sum_{k=1}^{n} (-\tfrac{1}{4})^k \\ &= (2f(\pi - a) + f(a)) \sum_{k=1}^{n} (-\tfrac{1}{4})^k. \end{aligned}$$

(d) En déduire que la série S_n converge vers une limite à préciser.

Correction : On a

$$S_n = (2f(\pi - a) + f(a)) \times \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1 - (-\frac{1}{4})^n}{1 - (-\frac{1}{4})} = -\frac{1}{5}\,(2f(\pi - a) + f(a)) \times \left(1 - (-\tfrac{1}{4})^n\right).$$

Puisque $(-\frac{1}{4})^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, la série S_n converge vers $-\frac{1}{5}\,(2f(\pi - a) + f(a))$.

Partie III - CHANGER DE COPIE

1. (a) Montrer que la fonction f admet au moins un point fixe $\ell \in \,]0\,,\pi[$.
(Utiliser la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$.)

Correction : • On pose $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est définie et continue sur $[0\,,\pi]$.
On vérifie que 0 est strictement compris entre $g(0)$ et $g(\pi)$:
(i) $g(0) = f(0) - 0 = \sqrt{2} > 0$;
(ii) $g(\pi) = f(\pi) - \pi = -\pi < 0$;
(iii) Comme $g(\pi) < 0 < g(0)$, d'après le T.V.I. $\exists\, c \in]0\,,\pi[\,,\ g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.
On pose $\ell = c$.

(b) En utilisant les variations de f, démontrer par l'absurde que f admet un unique point fixe $\ell \in \,]0\,,\pi[$.

Correction : On suppose que la fonction f admet au moins deux points fixes $\ell_1 \in]0\,,\pi[$ et $\ell_2 \in]0\,,\pi[$ avec $\boxed{\ell_1 < \ell_2}$. Puis que f est décroissante, on obtient

$$f(\ell_1) \geq f(\ell_2) \Rightarrow \boxed{\ell_1 \geq \ell_2} \text{ car } f(\ell_1) = \ell_1 \text{ et } f(\ell_2) = \ell_2.$$

Ce qui contredit l'hypothèse de départ sur ℓ_1 et ℓ_2. Donc f admet un unique point fixe.

On rappelle que le réel K est défini à la question **Partie I - 3.**
Dans la suite de l'exercice on admet que $0 < K < 1$.

2. Soit (u_n) la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0, \pi]\,, \\ u_{n+1} = f(u_n)\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

(a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie.

Correction : Il faut vérifier, par récurrence sur n, que $\forall n \in \mathbb{N}\,, u_n \in [0\,;\pi]$.

• Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $u_0 \in [0\,,\pi]$. Il n'y a rien à démontrer.

• Hypothèse de récurrence : $u_n \in [0\,,\pi]$.

• Hérédité : On doit montrer que $u_{n+1} \in [0\,,\pi]$.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$. L'hypothèse de récurrence et l'inclusion $f\big([0\,,\pi]\big) = [0\,,\sqrt{2}] \subset [0\,,\pi]$ entraînent $u_{n+1} \in [0\,,\pi]$.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}\,, u_n \in [0\,,\pi]$.

(b) Énoncer le théorème des accroissements finis.

Correction : Soit f une application continue sur $[a\,,b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur $]a\,,b[$. Alors $\exists\, c \in]a\,,b[\,,\ f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

(c) Montrer que

$$\forall (x,x') \in [0\,,\pi]^2,\ |f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|\ .$$

Correction : Soit $(x,x') \in [0\,,\pi]^2$. On distingue les cas $x = x'$ et $x \neq x'$.

• Si $x = x'$, on a $|f(x) - f(x')| = 0 = K|x - x'|$. L'égalité entraîne l'inégalité.

• Si $x \neq x'$, on applique l'égalité des accroissements finis à la fonction f entre x et x'. La fonction f est continue sur $[0\,,\pi]$ donc sur $[x\,;x']$ si $x < x'$ (resp. $[x'\,;x]$ si $x' < x$) et dérivable sur $]x\ ,x'[$ (resp. $]x'\,;x[$) donc il existe c strictement compris entre x et x' tel que

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \Rightarrow |f(x) - f(x')| = |f'(c)||x - x'| \underset{|f'(c)| \leq K}{\Rightarrow} |f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|$$

(d) Montrer, par récurrence sur n, que $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |u_n - \ell| \leq K^n|u_0 - \ell|$.

Correction : On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

• Initialisation : pour $n = 0$, on a $K^0 = 1$ donc $|u_0 - \ell| = K^0|u_0 - \ell|$. L'égalité entraîne l'inégalité.

• Hypothèse de récurrence : $|u_n - \ell| \leq K^n|u_0 - \ell|$.

• Hérédité : On doit montrer que $|u_{n+1} - \ell| \leq K^{n+1}|u_0 - \ell|$.

On sait que $\ell = f(\ell)$ donc $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)|$ et d'après la question précédente

$$|u_{n+1} - \ell| \leq K|u_n - \ell|$$

Maintenant on utilise l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$|u_{n+1} - \ell| \leq K \times K^n|u_0 - \ell| = K^{n+1}|u_0 - \ell|\ .$$

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |u_n - \ell| \leq K^n|u_0 - \ell|$.

(e) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Correction : La suite (u_n) converge vers ℓ. En effet, puisque $0 < K < 1$, on a $K^n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et le terme $|u_0 - \ell|$ est constant. D'après les théorèmes de comparaison des suites, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n - \ell = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell\ .$$