Final MT90/MA90 - P2019

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Barème approximatif (7, 8, 6).

Exercice 1 - CHANGER DE COPIE

L'exercice 1 contient 2 parties !

Partie I

Soit $a > 0$. On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\Omega =]-a\,,a\,[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) .$$

1. Montrer que $\forall\, x \in \Omega$, $f'(x) = \dfrac{2a}{a^2-x^2}$ et indiquer le sens de variation de f sur Ω.

   Correction :
   $$f'(x) = \frac{(a-x)-(-1)\times(a+x)}{(a-x)^2} \times \frac{1}{\frac{a+x}{a-x}} = \frac{2a}{a^2-x^2}.$$

   On a $\forall\, x \in]-a\,,a[,\ f'(x) > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur Ω.

2. À l'aide d'un théorème du cours, préciser la nature de $\mathrm{Im} f = f(\Omega)$. *(Soyez le plus précis possible).*

   Correction : La fonction f est continue et strictement monotone sur l'intervalle ouvert Ω donc $f(\Omega)$ est un intervalle ouvert.

3. Calculer $f(0)$, puis déterminer $\lim\limits_{x\to -a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

   Correction :
   $$f(0) = \ln\left(\frac{a+0}{a-0}\right) = \ln(1) = 0,$$

   $$\lim_{x\to -a^+} \frac{a+x}{a-x} = 0^+ \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to -a^+}{\to} -\infty\ ,$$

   $$\lim_{x\to a^-} \frac{a+x}{a-x} = +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to a^-}{\to} +\infty\ .$$

4. Montrer que f admet une fonction réciproque g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. *(On ne demande pas de déterminer l'expression algébrique de $g(x)$.)*

   Correction : La fonction f est dérivable et f' ne s'annule pas sur Ω donc f est bijective et son application réciproque g est définie et dérivable de $f(\Omega)$ sur Ω. Comme $f(\Omega)$ est un intervalle ni majoré, ni minoré, il s'agit de l'ensemble $f(\Omega) = \mathbb{R}$.

5. (a) Donner l'expression de la dérivée g' en fonction de f' et g, puis dresser le tableau de variation de g. *(on précisera, dans ce tableau, les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.)*

Correction : On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\frac{2a}{a^2-(g(x))^2}} = \frac{1}{2a}(a^2 - (g(x))^2).$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-a$	0	a

(b) Préciser la valeur de $g(0)$, puis déterminer $K = \max_{x\in\mathbb{R}} |g'(x)|$.

Correction : • On a l'équivalence

$$y = g(0) \Leftrightarrow f(y) = 0.$$

Comme la fonction f est bijective, on sait que l'équation $f(y) = 0$ admet une unique solution. D'après laquestion 3., on sait que $y = 0$.

• Puisque $\mathrm{Im}\, g =]-a\,, a[$, on a $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 0 < g'(x) \leq \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$. De plus $g'(0) = \frac{a^2-g(0)}{2a} = \frac{a}{2}$ donc $K = \max_{x\in\mathbb{R}} |g'(x)| = \frac{a}{2}$ et ce maximum est atteint en $x = 0$.

6. (a) Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ avec $x < x'$. Énoncer le théorème sur l'égalité des accroissements finis pour la fonction g sur l'intervalle $[x, x']$.

Correction : La fonction g est continue sur $[x\,; x']$ et dérivable sur $]x\ , x'[$ donc il existe $c \in\ ]x\,, x'[$ tel que

$$g(x) - g(x') = g'(c)(x - x').$$

(b) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |g(x)| \leq \frac{a}{2}|x|$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue les cas $x = 0$ et $x \neq 0$.

• Si $x = 0$, on a $|g(x)| = |g(0)| = 0 = \frac{a}{2}|0|$. L'égalité entraîne l'inégalité.

• Si $x \neq 0$, on applique l'égalité des accroissements finis à la fonction g entre x et $x' = 0$. On sait qu' il existe c strictement compris entre x et 0 tel que

$$g(x) - g(0) = g'(c)(x - 0) \Rightarrow |g(x) - g(0)| = |g'(c)||x| \underset{g(0)=0}{\Rightarrow} |g(x)| = |g'(c)||x|.$$

Or, $|g'(c)| \leq \frac{a}{2}$, d'où le résultat

$$|g(x)| \leq \frac{a}{2}|x|.$$

Partie II

Soit (u_n) la suite récurrente définie pour $n \geq 0$ par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$, où g est la fonction définie à la question **I) 4.** On définit la série S_n, de terme général u_n, comme suit

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Que peut-on dire de S_n si $u_0 = 0$?
   Correction : Si $u_0 = 0$ alors tous les termes de la suite (u_n) sont nuls donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, S_n = 0$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $u_0 \neq 0$.

2. (a) Montrer, par récurrence sur $n \geq 0$, que la suite (u_n) est de signe constant.
   Correction : D'après le tableau de variation de g, on a $x > 0 \Rightarrow g(x) > 0$ et $x < 0 \Rightarrow g(x) < 0$. Par conséquent, $u_0 > 0$ alors on montre par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, et si $u_0 < 0$ alors on montre par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n < 0$. La suite (u_n) est de signe constant.

   (b) En déduire que la suite (S_n) est strictement monotone. *(Indication : distinguer les cas $u_0 < 0$ et $u_0 > 0$.)*
   Correction : Si $u_0 > 0$, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$. Donc la suite (S_n) est strictement croissante. Si $u_0 < 0$, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = u_{n+1} < 0$. Donc la suite (S_n) est strictement décroissante.

3. Montrer, par récurrence sur n, que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \left(\frac{a}{2}\right)^n |u_0|$.
   Correction : • Initialisation : pour $n = 0$, on a $(\frac{a}{2})^0 = 1$ donc $|u_0| = (\frac{a}{2})^0 |u_0|$. L'égalité entraîne l'inégalité.
   • Hypothèse de récurrence : $|u_n| \leq (\frac{a}{2})^n |u_0|$.
   • Hérédité : On doit montrer que $|u_{n+1}| \leq (\frac{a}{2})^{n+1} |u_0|$.
   On sait que $|u_{n+1}| = |g(u_n)|$ et d'après la question **I) 6b.**
$$|u_{n+1}| = |g(u_n)| \leq \tfrac{a}{2} |u_n|.$$
   Maintenant on utilise l'hypothèse de récurrence pour obtenir
$$|u_{n+1}| \leq \tfrac{a}{2} \times (\tfrac{a}{2})^n |u_0| = (\tfrac{a}{2})^{n+1} |u_0|\ .$$
   • Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |u_n| \leq (\frac{a}{2})^n |u_0|$.

4. (a) Rappeler la condition nécessaire de convergence de la série S_n.
   Correction : S_n converge $\quad\Rightarrow\quad u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

   (b) Pour quelles valeurs de $a > 0$ cette condition nécessaire est-elle vérifiée, quel que soit le choix de $u_0 \in \mathbb{R}^*$?
   Correction : cette condition nécessaire est vérifiée si $0 < a < 2$. En effet, $\left(\frac{a}{2}\right)^n |u_0| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ donc (u_n) aussi d'après un corrolaire du théorème des gendarmes.

Dans la suite de l'exercice, on considère une telle valeur de a.

5. On pose $q = \frac{a}{2}$ et on définit la série géométrique
$$G_n = 1 + q + \cdots + q^n.$$
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n| \leq |u_0| G_n$.
   Correction : On utilise l'inégalité triangulaire et la question **3.**
$$\Big| u_0 + u_1 + \cdots + u_n \Big| \leq |u_0| + |u_1| + \cdots + |u_n| \leq |u_0| + \tfrac{a}{2}|u_0| + \cdots + \left(\tfrac{a}{2}\right)^n |u_0| = |u_0| G_n.$$

6. Donner une autre expression de G_n en fonction de n et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, G_n < \frac{1}{1-q}$.
   Correction : On sait que $G_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Or, si $0 < a < 2$ alors $0 < q < 1$ donc
$$0 < 1 - q \text{ et } 1 - q^{n+1} < 1 \quad \Rightarrow \quad G_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} < \frac{1}{1 - q}.$$

7. Montrer que, quel que soit le choix de $u_0 \in \mathbb{R}^*$, la série S_n converge. *(On ne demande pas de déterminer sa limite.)*

   Correction : Soit $u_0 \in \mathbb{R}^*$. Alors on sait que (S_n) est monotone et bornée puisque

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |S_n| \leq \frac{|u_0|}{1-q}.$$

   Donc la série S_n converge.

Exercice 2 - CHANGER DE COPIE

Les questions 1, 2 sont indépendantes.

1. (a) On note $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition d'une fonction f. Rappeler la caractérisation à l'aide des suites de la proposition "$f(x)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a".

   Correction :

$$\forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \quad \Big(x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,, x_n \in \mathcal{D}_f\backslash\{a\}\Big) \Rightarrow \Big(f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} \ell\Big)$$

   (b) On définit la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = 1, & \text{si } x \in A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}, \\ f(x) = 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

   La fonction f admet-elle une limite finie quand $x \to 0$?

   Correction : Non, la fonction f n'admet pas de limite quand $x \to 0$. Il existe deux suites $(x_n = \frac{1}{n})_{n\geq 1}$ et $(x'_n = -\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ telles que

$$\Big(\forall\, n \in \mathbb{N}^*, x_n \in [-1,1] \text{ et } x'_n \in [-1,1]\Big) \text{ et } x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ et } x'_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

   Pourtant, $(f(x_n))$ et $(f(x'_n))$ sont deux suites constantes égales à 1 et 0, respectivement.
   Donc elles convergent vers deux limites différentes : 1 et 0.
   La caractérisation séquentielle des suites n'est pas vérifiée.

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante

$$\begin{cases} g(x) = \alpha x + \beta \sin x + x^2 \text{Arctan}\dfrac{1}{x}\,, & \text{si } x \neq 0\,, \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

   (a) Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. *(On ne demande pas d'utiliser la définition avec quantificateurs.)*

   Correction : On distingue les cas $x \neq 0$ et $x = 0$.
   • Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction g est composée de fonction continues : polynôme, fonction inverse, sinus et Arctan. Donc g est continue également.
   • En $x = 0$, on doit vérifier si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$.
   Comme $x \mapsto \alpha x + \beta \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$, on a

$$\alpha x + \beta \sin x \underset{x\to 0}{\to} \alpha \times 0 + \beta \times \sin(0) = 0.$$

   Ensuite, on utilise le fait que Arctan est bornée ($\text{Im}\text{Arctan} =]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$) donc le produit avec $x \to x^2$ est une fonction qui tend vers 0 quand $x \to 0$. D'après les opération sur les limites, on a bien $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$ donc g est continue en $x = 0$.

(b) Montrer que la fonction g est dérivable en $x = 0$. On précisera la valeur de $g'(0)$.

Correction : Pour ce faire on étudie le taus de variation de g en $x = 0$:

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \alpha + \beta\frac{\sin x}{x} + x\text{Arctan}\frac{1}{x}.$$

Comme à la question précédente, on montre que $x\text{Arctan}\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\to} 0$ grâce au collaire 2 du théorème des gendarmes. On utilise également la limité démontrée en cours

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1.$$

On en déduit que g est dérivable en $x = 0$ et

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x) - g(0)}{x} = \alpha + \beta.$$

(c) Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$.

Correction : On sait déjà que g est dérivable en $x = 0$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, comme compose de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

$$g'(x) = \begin{cases} \alpha + \beta\cos x + 2x\text{Arctan}\dfrac{1}{x} - \dfrac{x^2}{1+x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0\ , & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(d) La fonction dérivée g' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Correction : La fonction g' est de toute évidence continue sur $\mathbb{R}^*$ par composition de fonction continues sur $\mathbb{R}^*$. On doit vérifier si $\lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0)$. Comme $x \mapsto \alpha+\beta\cos x - \frac{x^2}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en $x = 0$, on a tout d'abord

$$\alpha + \beta\cos x - \frac{x^2}{1+x^2} \underset{x\to 0}{\to} \alpha + \beta.$$

On a déjà montré que $x\text{Arctan}\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\to} 0$ donc on a bien

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \alpha + \beta = g'(0).$$

La fonction g' est continue sur $\mathbb{R}$: on peut donc écrire $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.