Final MT90/MA90 - P2021

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Barème approximatif (5, 5, 6).

Problème

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + \cos x)\sin x$.
On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = p(\cos x)$, où

$$p(t) = -1 + t + 2t^2.$$

Partie I - Étude d'extrema locaux

1. Indiquer le lien logique ($\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$) entre les deux propositions suivantes :

$$f'(x_*) = 0 \qquad \ldots \qquad x_* \text{ réalise un extremum local de } f.$$

2. Déterminer les racines du polynôme $p(t)$ et dresser son tableau de signe sur l'intervalle $[-1, 1]$.
3. Justifier que

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{3} \bmod 2\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3} \bmod 2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi \bmod 2\pi$$

4. Dresser le tableau de signe de f' puis le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
5. Déterminer l'ensemble des réels x_* réalisant un extremum local de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Préciser leur nature (minimum ou maximum local) et leur valeur $f(x_*)$.
6. En déduire que l'implication énoncée à la question **1.** n'est pas une équivalence.

Partie II - Étude d'une fonction réciproque

Dans cette partie on étudiera la fonction g définie sur $I = [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ par $g(x) = f(x)$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Indiquer le lien logique ($\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$) entre les deux propositions suivantes :

$$\forall x \in]a, b[,\ f'(x) < 0 \qquad \cdots \qquad f \text{ est strictement décroissante sur } [a, b].$$

2. Montrer que les restrictions $g : [\frac{\pi}{3}, \pi] \to F_1$ et $g : [\pi, \frac{5\pi}{3}] \to F_2$ sont bijectives avec des intervalles F_1 et F_2 à préciser.
3. Justifier que g est injective sur I.
4. En déduire que g admet une application réciproque g^{-1} continue sur son domaine de définition à préciser.
5. (a) Sur quel ensemble la fonction g^{-1} est-elle dérivable ?
   (b) Pour $b = g(\frac{\pi}{2})$, calculer $(g^{-1})'(b)$.

Partie III - Étude d'une suite récurrente

1. (a) Déterminer $q := \max_{t \in [-1,1]} |p(t)|$.

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que l'équation $f(x) = \lambda x$ admet au moins deux solutions distinctes $c_1 \in \mathbb{R}$ et $c_2 \in \mathbb{R}$ avec $c_1 < c_2$. Montrer qu'il existe alors $c \in]c_1, c_2[,\ f'(c) = \lambda$.
   (Indication : appliquer le théorème de Rolle à une fonction judicieusement choisie.)

   Dans la suite, on suppose que $\boldsymbol{\lambda > q}$.

   (c) Montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = \lambda x$ admet une unique solution $\ell = 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Soit (u_n) la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \ [0, \frac{\pi}{2}] \ , \\ u_{n+1} = \dfrac{f(u_n)}{\lambda} \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ . \end{cases}$$

   (a) À l'aide du théorème des accroissements finis, justifier que

$$\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ |f(x)| \leq q|x| \ .$$

   (b) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq \left(\frac{q}{\lambda}\right)^n |u_0| \ .$$

   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.