Corrigé du Final
MT90/MA90 - P2021

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Barème approximatif (5, 5, 6).

Problème

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + \cos x)\sin x$.
On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = p(\cos x)$, où

$$p(t) = -1 + t + 2t^2.$$

Partie I - Étude d'extrema locaux

1. Indiquer le lien logique ($\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$) entre les deux propositions suivantes :

$$f'(x_*) = 0 \qquad \dots \qquad x_* \text{ réalise un extremum local de } f.$$

Correction :

$$f'(x_*) = 0 \qquad \Leftarrow \qquad x_* \text{ réalise un extremum local de } f.$$

2. Déterminer les racines du polynôme $p(t)$ et dresser son tableau de signe sur l'intervalle $[-1, 1]$.
Correction : • La discriminant est $\delta = 1 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$. Les deux racines de $p(t)$ sont $t_1 = \frac{-1-3}{2\times 2} = -1$ et $t_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$.

t	-1		$\frac{1}{2}$		1
$p(t)$	0	$-$	0	$+$	

3. Justifier que

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{3} \bmod 2\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3} \bmod 2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi \bmod 2\pi$$

Correction : On sait que $f'(x) = p(\cos x)$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(\cos x) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \cos x = -1 \quad \text{ou} \quad \cos x = \tfrac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow \quad x = \pi \bmod 2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pm\tfrac{\pi}{3} \bmod 2\pi. \end{aligned}$$

4. Dresser le tableau de signe de f' puis le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

   Correction :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0

5. Déterminer l'ensemble des réels x_* réalisant un extremum local de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Préciser leur nature (minimum ou maximum local) et leur valeur $f(x_*)$.

   Correction : D'après le tableau de variation de f et par 2π-périodicité de f, nous en déduisons que

$$x_* = \frac{\pi}{3} \bmod 2\pi \quad \Rightarrow \quad f(x_*) = \tfrac{3\sqrt{3}}{4} \text{ est un maximum local de } f,$$

$$x_* = -\frac{\pi}{3} \bmod 2\pi \quad \Rightarrow \quad f(x_*) = -\tfrac{3\sqrt{3}}{4} \text{ est un minimum local de } f.$$

   Il s'agit d'extrema globaux.

6. En déduire que l'implication énoncée à la question **1.** n'est pas une équivalence.

   Correction : La réciproque de l'implication énoncée à la question **1.** est fausse car $f'(\pi) = 0$ et $f(\pi)$ n'est ni un minimum, ni un maximum local de f.

Partie II - Étude d'une fonction réciproque

Dans cette partie on étudiera la fonction g définie sur $I = [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ par $g(x) = f(x)$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Indiquer le lien logique ($\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$) entre les deux propositions suivantes :

$$\forall x \in]a, b[,\ f'(x) < 0 \qquad \cdots \qquad f \text{ est strictement décroissante sur } [a, b].$$

   Correction :

$$\forall x \in]a, b[,\ f'(x) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ est strictement décroissante sur } [a, b].$$

2. Montrer que les restrictions $g : [\frac{\pi}{3}, \pi] \to F_1$ et $g : [\pi, \frac{5\pi}{3}] \to F_2$ sont bijectives avec des intervalles F_1 et F_2 à préciser.

   Correction : D'après le tableau de variation de f, les restrictions $g : [\frac{\pi}{3}, \pi] \to \mathbb{R}$ et $g : [\pi, \frac{5\pi}{3}] \to \mathbb{R}$ sont strictement décroissantes. Elles sont donc injectives. En choisissant

$$F_1 = [g(\pi), g(\tfrac{\pi}{3})] = [0, \tfrac{3\sqrt{3}}{4}] \quad \text{et} \quad F_2 = [g(\tfrac{5\pi}{3}), g(\pi)] = [-\tfrac{3\sqrt{3}}{4}, 0]\ ,$$

   les restrictions $g : [\frac{\pi}{3}, \pi] \to F_1$ et $g : [\pi, \frac{5\pi}{3}] \to F_2$ sont injectives et surjectives donc bijectives.

3. Justifier que g est injective sur I.

Correction : Soient $(x,x') \in I^2$ tel que $g(x)=g(x')$.

• Si $x \in [\frac{\pi}{3},\pi]$ et $x' \in [\frac{\pi}{3},\pi]$ alors $x=x'$ car $g:[\frac{\pi}{3},\pi] \to F_1$ est injective.

• Si $x \in [\pi,\frac{5\pi}{3}]$ et $x' \in [\pi,\frac{5\pi}{3}]$ alors $x=x'$ car $g:[\pi,\frac{5\pi}{3}] \to F_2$ est injective.

• Si $x \in [\frac{\pi}{3},\pi]$ et $x' \in [\pi,\frac{5\pi}{3}]$ (et inversement) alors $g(x)=g(x') \in F_1 \cap F_2 = \{0\}$. On en déduit que $x=x'=\pi$.

La fonction g est bien injective sur I.

4. En déduire que g admet une application réciproque définie et continue sur son domaine de définition à préciser.

Correction : La fonction g étant injective sur I, elle est alors bijective de I sur $\operatorname{Im} g = [-\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}]$. Elle admet donc une application réciproque g^{-1} définie sur $\operatorname{Im} g$. Comme g est continue sur I, g^{-1} est continue sur $\operatorname{Im} g$

5. (a) Sur quel ensemble la fonction g^{-1} est-elle dérivable ?

Correction : La fonction g^{-1} est dérivable en $b=g(a)$ si $g'(a) \neq 0$. Il faut donc exclure les valeurs $a=\frac{\pi}{3}$, $a=\pi$ et $a=\frac{5\pi}{3}$. On en déduit que g^{-1} est dérivable sur $]-\frac{3\sqrt{3}}{4},0[\cup]0,\frac{3\sqrt{3}}{4}[$.

(b) Pour $b=g(\frac{\pi}{2})$, calculer $(g^{-1})'(b)$.

Correction : On utilise la formule

$$(g^{-1})'(b) = \frac{1}{g'(g^{-1}(b))} = \frac{1}{g'(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{p(0)} = -1.$$

Partie III - Étude d'une suite récurrente

1. (a) Déterminer $q := \max_{t\in[-1,1]} |p(t)|$.

Correction : La fonction p est un polynôme du second degré. sa courbe représentative est une parabole admettant un minimum global en t_* tel que $p'(t_*)=0$: on obtient

$$\begin{aligned} 4t_*+1=0 \quad &\Rightarrow \quad t_* = -\frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \quad \forall t \geq -\frac{1}{4},\ p(t) \geq p(-\tfrac{1}{4}) = -1-\tfrac{1}{4}+2\times\tfrac{1}{16} = -\tfrac{9}{8}. \end{aligned}$$

t	-1		$-\frac{1}{4}$		1
$p(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	2

D'après le tableau de variation de p, on en déduit que $\boxed{q := \max_{t\in[-1,1]} |p(t)| = 2}$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que l'équation $f(x)=\lambda x$ admet au moins deux solutions distinctes $c_1 \in \mathbb{R}$ et $c_2 \in \mathbb{R}$ avec $c_1 < c_2$. Montrer qu'il existe alors $c \in]c_1,c_2[,\ f'(c)=\lambda$.
(Indication : appliquer le théorème de Rolle à une fonction judicieusement choisie.)

Correction : On pose $h(x)=f(x)-\lambda x$. La fonction h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a donc $h(c_1)=f(c_1)-\lambda c_1 = 0$ et $h(c_2)=f(c_2)-\lambda c_2=0$. La fonction h est continue sur $[c_1\,;c_2]$ et dérivable sur $]c_1\,;c_2[$. D'après le théorème de Rolle, comme $h(c_1)=h(c_2)$, on sait qu'il existe $c \in]c_1\,;c_2[$ tel que $h'(c)=0 \Leftrightarrow f'(c)-\lambda=0 \Leftrightarrow f'(c)=\lambda$.

Dans la suite, on suppose que $\lambda > q$.

(c) Montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = \lambda x$ admet une unique solution $\ell = 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Correction : On vérifie que $f(\ell = 0) = 0$. Soit $\ell' \in]0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $f(\ell') = \lambda\ell'$. D'après la question précédente, il existe $c \in]0, \ell'[$ tel que $f'(c) = \lambda$. Or $f'(c) = p(\cos(c)) \leq q \Rightarrow \lambda \leq q$, ce qui est absurde car $\lambda > q$ par hypothèse.

On en déduit que $\ell = 0$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = \lambda x$.

2. Soit (u_n) la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \ [0, \frac{\pi}{2}]\ , \\ u_{n+1} = \dfrac{f(u_n)}{\lambda}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ . \end{cases}$$

(a) À l'aide du théorème des accroissements finis, justifier que

$$\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ |f(x)| \leq q|x|\ .$$

Correction : Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On distingue les cas $x = 0$ et $x \neq 0$.

• Si $x = 0$, on a $|f(x)| = |f(0)| = 0 = q|0|$. L'égalité entraîne l'inégalité.

• Si $x \neq 0$, on applique l'égalité des accroissements finis à la fonction f entre x et $x' = 0$. On sait qu' il existe c strictement compris entre x et 0 tel que

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \Rightarrow |f(x) - f(0)| = |f'(c)||x| \underset{f(0)=0}{\Rightarrow} |f(x)| = |f'(c)||x|.$$

Or, $|f'(c)| = |p(\cos(c))| \leq q$, d'où le résultat

$$|f(x)| \leq q|x|.$$

(b) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq \left(\frac{q}{\lambda}\right)^n |u_0|\ .$$

Correction : • Initialisation : pour $n = 0$, on a $(\frac{q}{\lambda})^0 = 1$ donc $|u_0| = (\frac{q}{\lambda})^0|u_0|$. L'égalité entraîne l'inégalité.

• Hypothèse de récurrence : $|u_n| \leq (\frac{q}{\lambda})^n|u_0|$.

• Hérédité : On doit montrer que $|u_{n+1}| \leq (\frac{q}{\lambda})^{n+1}|u_0|$.

On sait que $|u_{n+1}| = \frac{|f(u_n)|}{\lambda}$ et d'après la question **III) 2b.**

$$|u_{n+1}| = \frac{|f(u_n)|}{\lambda} \leq \frac{q|u_n|}{\lambda}.$$

Maintenant on utilise l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$|u_{n+1}| \leq \tfrac{q}{\lambda} \times (\tfrac{q}{\lambda})^n|u_0| = (\tfrac{q}{\lambda})^{n+1}|u_0|\ .$$

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |u_n| \leq (\frac{q}{\lambda})^n|u_0|$.

(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Correction : La suite (u_n) converge vers $\ell = 0$. En effet, puisque $0 < q = 2 < \lambda$, on a $|\frac{q}{\lambda}| < 1$ et $\left(\frac{q}{\lambda}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et le terme $|u_0|$ est constant. D'après les théorèmes de comparaison des suites, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\ .$$