Corrigé du Médian MT90 - P2018

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (11 points)
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Soient P et Q deux propositions. Les propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?
   (a) $(\text{non}\, P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$.
   Correction :
   $$\begin{aligned}\Big((\text{non}\, P \Rightarrow Q) \Rightarrow P\Big) \Leftrightarrow \Big((P \text{ ou } Q) \Rightarrow P\Big) &\Leftrightarrow \Big(\text{non}\,(P \text{ ou } Q) \text{ ou } P\Big)\\ &\Leftrightarrow \Big((\text{non}\, P \text{ et non}\, Q) \text{ ou } P\Big)\\ &\Leftrightarrow \Big((\text{non}\, P \text{ ou } P) \text{ et } (\text{non}\, Q \text{ ou } P)\Big)\\ &\Leftrightarrow \text{non}\, Q \text{ ou } P\end{aligned}$$
   Cette proposition n'est pas toujours vraie. Si P est fausse et Q est vraie alors la proposition $(\text{non}\, P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$ est fausse.
   (b) $\big((P \Rightarrow Q) \text{ et non}\, Q\big) \Rightarrow \text{non}\, P$.
   Correction :
   $$\begin{aligned}\Big(\big((P \Rightarrow Q) \text{ et non}\, Q\big) \Rightarrow \text{non}\, P\Big) &\Leftrightarrow \Big(\big((\text{non}\, P \text{ ou } Q) \text{ et non}\, Q\big) \Rightarrow \text{non}\, P\Big)\\ &\Leftrightarrow \Big(\big((\text{non}\, P \text{ et non}\, Q) \text{ ou } (Q \text{ et non}\, Q)\big) \Rightarrow \text{non}\, P\Big)\\ &\Leftrightarrow \Big((\text{non}\, P \text{ et non}\, Q) \Rightarrow \text{non}\, P\Big)\\ &\Leftrightarrow \Big((P \text{ ou } Q) \text{ ou non}\, P\Big)\end{aligned}$$
   Cette proposition est toujours vraie.
2. Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit ouvert si la propriété suivante est vérifiée :
   $$\forall\, x \in A,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ (y \in]x-\eta, x+\eta[\Rightarrow y \in A)\,.$$
   (a) Écrire la négation de la proposition ci-dessus.
   Correction : $\exists\, x \in A,\ \forall\, \eta > 0,\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ (y \in]x-\eta, x+\eta[\text{ et } y \notin A)\,.$
   (b) Montrer que l'intervalle $[0, 1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.
   Correction : A l'aide de la question (a), on montre que la négation de « $[0, 1[$ est un ensemble ouvert » est vraie.
   Prenons $x = 0$. On a bien $x \in [0, 1[$.
   Soit $\eta > 0$. Prenons $y = -\frac{\eta}{2}$. Alors $y \in]0-\eta, 0+\eta[$ et $y \notin [0, 1[$.
   D'après (b), l'intervalle n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

3. (a) Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Donner, en utilisant les quantificateurs, la définition de

   i. « f est n'est pas injective de E dans F ».
      Correction : $\exists\,(x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$.

   ii. « f est bijective de E dans F ».
      Correction : $\forall\, y \in F,\ \exists !\, x \in E,\ y = f(x)$

(b) Soit B une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to B$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

   i. Pour $x \neq 0$, calculer $f(\frac{1}{x})$.
      Correction :

$$f(\tfrac{1}{x}) = \frac{\frac{2}{x}}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{\frac{2}{x}}{1+(\frac{1}{x})^2} \times \frac{x^2}{x^2} = \frac{2x}{x^2+1} = f(x).$$

   ii. En supposant $B = \mathbb{R}$, la fonction f est-elle injective ?
      Correction : D'après la question précédente, $f(2) = f(\frac{1}{2})$ et $2 \neq \frac{1}{2}$. Donc l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective.

   iii. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction du paramètre a le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$ax^2 - 2x + a = 0\ .$$

   Donner l'expression des solutions, en fonction de a, quand elles existent.
      Correction : Il faut distinguer les cas $a = 0$ et $a \neq 0$.
      • Si $a = 0$ alors il s'agit d'une équation du premier degré qui admet une unique solution $x = 0$.
      • Pour $a \neq 0$ fixé, il s'agit d'une équation du second degré d'inconnue x.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times a \times a = 4(1-a^2).$$

      Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow a^2 > 1 \Leftrightarrow a \in]-\infty,\ -1[\cup]1,\ +\infty[$, alors l'équation n'admet pas de solution.
      Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$, alors l'équation admet une unique solution $x = \frac{1}{a} = a$.
      Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow a \in]-1\,,0[\cup]0\,,1[$, alors l'équation admet exactement deux solutions

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{4(1-a^2)}}{2a} = \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} \text{ ou } x_2 = \frac{2-\sqrt{4(1-a^2)}}{2a} = \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

iv. Donner une condition nécessaire et suffisante sur B pour que la fonction f soit surjective.

Correction : L'application $f : \mathbb{R} \to B$ est surjective si pour tout $y \in B$, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution. Or $y = f(x) \Leftrightarrow y(1+x^2) = 2x \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$. On utilise les résultats de la question précédente (avec $y = a$) pour en déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour $f : \mathbb{R} \to B$ soit surjective est $B \subset [-1, 1]$.

v. Montrer que l'application $g :]0\,,1[\to]0\,,1[$ définie par $g(x) = f(x)$ est bijective. Donner l'expression algébrique de g^{-1}.

Correction : D'après la question iii., on sait que si $y \in]0\,,1[$, alors y admet deux antécédents dans $\mathbb{R}$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} \text{ ou } x_2 = \frac{2 - \sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y}.$$

D'après la question i., on sait que $x_2 = \frac{1}{x_1}$. On remarque $x_1 > 1$ donc $x_2 \in]0\,,1[$ est l'unique solution de l'équation $y = f(x)$ dans l'intervalle $]0, 1[$.
L'application g est bijective et son application réciproque $g^{-1} :]0\,,1[\to]0\,,1[$ est définie par $g^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$.

Exercice 2 (9 points)

1. Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n(-1)^n + 1}{n - (-1)^n} = \begin{cases} \frac{n+1}{n-1} & \text{si } n \text{ est pair et } n \geq 2, \\ -\frac{n-1}{n+1} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

(a) Déterminer une suite (v_n) divergente telle que la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Correction : On pose $v_n = (-1)^n$. On sait que (v_n) est une suite divergente (cf cours). On calcule $u_n - v_n$:

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= \frac{n(-1)^n + 1}{n - (-1)^n} - \frac{n(-1)^n - ((-1)^n)^2}{n - (-1)^n} \\ &= \frac{n(-1)^n + 1}{n - (-1)^n} - \frac{n(-1)^n - 1}{n - (-1)^n} = \frac{2}{n - (-1)^n} \end{aligned}$$

On a $n - (-1)^n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ donc $\frac{2}{n-(-1)^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc $u_n - v_n \to \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

(b) En déduire, suivant un raisonnement par l'absurde, que la suite (u_n) diverge.

Correction : On suppose que (u_n) converge. On écrit

$$v_n = u_n - (u_n - v_n).$$

D'après les opérations sur les limites, on en déduit que (v_n) est une suite convergente. Ce qui est absurde car (v_n) est divergente.
Par conséquent, (u_n) diverge.

(c) Utiliser la définition avec quantificateurs pour montrer que la suite (w_n), définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = u_{2n+1}$, converge vers une limite ℓ à préciser.

Correction : On a $w_n = \frac{-2n}{2n+2} = -\frac{n}{n+1}$. A priori, la limite est $\ell = -1$. On doit montrer la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |w_n - (-1)| = |w_n + 1| < \varepsilon).$$

preuve : Soit $\varepsilon > 0$. On résoud l'inéquation $|w_n + 1| < \varepsilon$.
Tout d'abord,

$$|w_n + 1| = \left| -\frac{n}{n+1} + 1 \right| = \frac{1}{n+1}.$$

On a les équivalences suivantes :

$$|w_n + 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

On pose $N = E(\frac{1}{\varepsilon} - 1) + 1$. Ainsi, par définition de la fonction partie entière, on a

$$n > N \Rightarrow n > E(\tfrac{1}{\varepsilon} - 1) + 1 \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow |w_n + 1| < \varepsilon.$$

La convergence de (w_n) vers $\ell = -1$ est démontrée.

(d) On définit $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

i. Montrer que A admet une borne inférieure et une borne supérieure.

Correction : $u_1 \in A$ donc A est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Il reste à montrer que A est minorée et majorée. Pour ce faire, il est utile d'étudier les variations des suites d'indices pairs et impairs. Les termes d'indices pairs s'écrivent pour $p \geq 1$

$$u_{2p} = \frac{2p+1}{2p-1} = 1 + \frac{2}{2p-1}\ .$$

Les termes d'indices impairs s'écrivent pour $p \geq 0$

$$u_{2p+1} = -\frac{p}{p+1} = -1 + \frac{1}{p+1}\ .$$

On a

$$u_{2p+2} - u_{2p} = 1 + \frac{2}{2p+1} - (1 + \frac{2}{2p-1}) = -\frac{4}{(2p+1)(2p-1)} < 0$$

et

$$u_{2p+3} - u_{2p+1} = -1 + \frac{1}{p+2} - (-1 + \frac{1}{p+1}) = -\frac{1}{(p+2)(p+1)} < 0.$$

Les deux suites sont décroissantes donc elles sont majorées par leur premier terme : $u_{2p} \leq u_2 = 3$ et $u_{2p+1} \leq u_1 = 0$. De plus

$$\frac{2}{2p-1} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{2}{2p-1} > 1 \Rightarrow u_{2p} > 1,$$

et

$$\frac{1}{p+1} > 0 \Rightarrow -1 + \frac{1}{p+1} > -1 \Rightarrow u_{2p+1} > -1.$$

On peut donc ordonner les termes de la suite u_n comme suit

$$-1 < \cdots \leq u_{2p+1} \leq \cdot \leq u_1 = 0 < 1 < \cdots \leq u_{2p} \leq u_2 = 3 \ ,$$

pour en déduire que l'ensemble A est borné par -1 et 3 : $A \subset]-1, 3]$.
D'après l'axiome de la borne supérieure, A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc $\sup A$ existe.
D'après l'axiome de la borne inférieure, A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ donc $\inf A$ existe.

ii. Démontrer par l'absurde que si A admet un plus grand élément α alors $\sup A = \alpha$.

Correction : La proposition :

$$\forall t < \alpha, \ \exists x \in A, \ t < x$$

est vraie car sa négation est fausse. En effet, la négation s'écrit

$$\exists t < \alpha, \ \forall x \in A, \ t \geq x \ .$$

Pour $x = \alpha \in A$ on aurait $t < \alpha$ et $t \geq \alpha$, ce qui est absurde.
En conclusion, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A, \ x \leq \alpha \\ \forall t < \alpha, \ \exists x \in A, \ t < x \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \sup A = \alpha.$$

iii. Démontrer que $\inf A = \ell$.

Correction : On a déjà montré que $\ell = -1$ est un minorant de l'ensemble A. Il reste à démontrer que -1 est le plus grand des minorants. Autrement dit,

$$\forall t > -1, \ \exists u_n \in A, \ t > u_n \ .$$

preuve : On va chercher un terme de la suite d'indice impair $n = 2p + 1$.
Soit $t > -1$. On résoud l'inégalité $t > u_{2p+1}$:

$$t > u_{2p+1} \Leftrightarrow t > -1 + \frac{1}{p+1} \Leftrightarrow (t+1) > \frac{1}{p+1} \Leftrightarrow p > \frac{1}{(t+1)} - 1 \ .$$

D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ vérifiant cette inégalité. On peut même choisir le plus petit d'entre eux $p = E(\frac{1}{(t+1)} - 1) + 1$.
On a trouvé $u_n = u_{2p+1} \in A$ tel que $t > u_n$.
En conslusion, $\inf A = -1$.

iv. A admet-elle un plus grand élément ? un plus petit élément ? Si oui, le donner. Dans tous les cas, démontrer la réponse.

Correction : L'ensemble A est majoré par $u_2 \in A$ donc u_2 est le plus grand élément de A.
Si A admet un plus petit élément β alors $\beta = \inf A = -1$. Or l'équation $u_{2p+1} = -1$ n'admet aucune solution donc -1 n'est pas atteint par la suite. L'ensemble n'admet pas de plus petit élément.

2. On définit la suite (s_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$s_n = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \cdots \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

(a) Montrer que les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes.

Correction :

(i) La suite (s_{2n}) est décroissante, en effet pour tout $n \geq 1$ on a

$$s_{2n+2} - s_{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} < 0 \,.$$

(ii) La suite (s_{2n+1}) est croissante, en effet pour tout $n \geq 0$ on a

$$s_{2n+3} - s_{2n+1} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} > 0 \,.$$

(iii) La suite $(s_{2n+1} - s_{2n})$ converge vers 0, en effet pour $n \geq 1$ on a

$$s_{2n+1} - s_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

<u>Conclusion :</u> Les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes. Les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont donc convergentes vers une même limite $\ell' \in \mathbb{R}$.

(b) QUESTION BONUS : Que peut-on en déduire sur la suite (s_n) ? *(Faire une démonstration rigoureuse du résultat énoncé).*

Correction : On traduit la convergence des suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) à l'aide de la définition avec quantificateurs. On a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N_1 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ (n > N_1 \Rightarrow |s_{2n} - \ell'| < \varepsilon)$$

et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N_2 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ (n > N_2 \Rightarrow |s_{2n+1} - \ell'| < \varepsilon)$$

<u>Résultat</u> : La suite (s_n) converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$.
<u>Preuve</u> : Soit $\varepsilon > 0$. On pose $N = \max(N_1, N_2)$.
Dans la suite on procède par disjonction de cas : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,
• si n est pair, alors

$$n = 2p \text{ avec } p \in \mathbb{N}^* \text{ et } n > N \Rightarrow 2p > N \geq N_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell'| < \varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell'| < \varepsilon$$

• si n est impair, alors

$$n = 2p{+}1 \text{ avec } p \in \mathbb{N} \text{ et } n > N \Rightarrow 2p{+}1 > N \geq N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell'| < \varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell'| < \varepsilon$$

<u>Conclusion</u> : On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ (n > N \Rightarrow |s_n - \ell'| < \varepsilon) \,.$$

Complément : la suite (s_n) est appelée série alternée. Vous verrez au chapitre 6 que $\ell' = -\ln 2$.